Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Б. З. ВУЛИХ

О КОНКРЕТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ЛИНЕАЛОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 12 III 1951)

В теории линейных полуупорядоченных пространств (K-пространств) устанавливается возможность реализации таких пространств посредством вещественных непрерывных функций (допускающих, в общем случае, значения $\pm\infty$), определенных на вполне несвязных бикомпактах (([1]), гл. XIII). В настоящей заметке аналогичная реализация устанавливается для более общих линейных полуупорядоченных множеств — K-линеалов *.

1. Реализация K-линеала. Пусть X — архимедовский K-линеал с единицей **1**, а X_0 — K-линеал, состоящий из ограниченных элементов K-линеала X. Как известно, если в X_0 определить норму, полагая $\|x\|$ равной минимуму тех λ, для которых $|x| \leqslant \lambda \mathbf{1}$, K-линеал X_0 становится линейным нормированным пространством. Мы будем предполагать, что это пространство полно по норме, т. е. является пространством типа (B). В противном случае нетрудно дополнить X таким образом, чтобы X_0 стало пространством типа (B).

По теореме М. Г. и С. Г. Крейнов ([2]), существует такой бикомпакт Q, что X_0 изоморфно пространству $C(Q)$ всех ограниченных вещественных непрерывных функций $x(t)$, определенных на Q. Покажем, как этот изоморфизм может быть распространен на весь K-линеал X, если использовать также и некоторые неограниченные непрерывные функции на бикомпакте Q.

Пусть $x \in X$ и $x > 0$. Положим $x_n = x \wedge n\mathbf{1}$. Так как $x_n \in X_0$, то ему, при указанном выше изоморфизме между X и $C(Q)$, соответствует ограниченная непрерывная функция $x_n(t)$ (неотрицательная). При этом из монотонности последовательности $\{x_n\}$ вытекает, что функции $x_n(t)$ также образуют монотонную последовательность. Кроме того, эта последовательность обладает тем свойством, что если в некоторой точке $t_0 \in Q$ $x_n(t_0) < n$, то в этой точке t_0 последовательность «стабилизируется»:

$$x_n(t_0) = x_{n+1}(t_0) = \cdots = x_{n+p}(t_0) = \cdots$$

Отсюда уже сразу вытекает, что функция $x(t) = \lim x_n(t)$ непрерывна Эту функцию $x(t)$ и сопоставим элементу x.

* Точное определение K-линеала см. ([1]). Здесь мы лишь напомним, что основное отличие K-линеала от K-пространства заключается в том, что не предполагается существование граней у каждого ограниченного множества. В дальнейшем мы пользуемся терминологией из теории K-пространств без ссылок на ([1]).

Произвольному $x \in X$ сопоставляем функцию $x(t)$, определяемую как $x(t) = x_+(t) - x_-(t)$, где $x_+(t)$ и $x_-(t)$ — неотрицательные функции, построенные только что указанным способом по элементам x_+ и x_-. При этом, благодаря дизъюнктности x_+ и x_-, функции $x_+(t)$ и $x_-(t)$ ни в одной точке не могут быть одновременно отличны от нуля, а потому разность $x_+(t) - x_-(t)$ имеет смысл даже и в точках, где одна из этих функций равна $+\infty$ или $-\infty$.

Таким образом, устанавливается отображение K-линеала X на некоторое множество $C_X(Q)$ непрерывных функций, заданных на Q. С помощью известной теоремы Урысона и принципа Архимеда, который предполагаем выполненным в K-линеале X, легко проверить, что все функции, входящие в $C_X(Q)$, принимают значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах. Наконец, можно доказать, что установленное отображение K-линеала X на множество $C_X(Q)$ взаимно-однозначно, аддитивно* и сохраняет упорядочение, т. е. представляет изоморфизм. В результате мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Всякий архимедовский K-линеал с единицей изоморфен K-линеалу, составленному из непрерывных функций, заданных на некотором бикомпакте и допускающих на нигде не плотных множествах значения $\pm\infty$.*

2. Расширение K-линеала. Как и в случае K-пространств, будем говорить, что K-линеал Y является расширением K-линеала X, если X изоморфен K-линеалу Y_1, нормально содержащемуся в Y и полному в нем (ср. ([1]), стр. 144).

В связи с требованием нормальности погружения K-линеала в его расширение, ограничимся рассмотрением только K-линеалов X, обладающих следующим свойством: если $C_X(Q)$ — образ K-линеала X, построенный указанным в п. 1 методом, и если непрерывная функция $x(t)$ входит в $C_X(Q)$, то и всякая непрерывная функция $y(t)$ такая, что $|y(t)| \leqslant |x(t)|$, тоже принадлежит $C_X(Q)$. K-линеал X, обладающий этим свойством, будем называть нормальным**.

Поставим вопрос — существует ли у K-линеала X_0 ограниченных элементов максимальное расширение, т. е. такой K-линеал, который является расширением всякого нормального K-линеала, представляющего расширение K-линеала X_0. На этот вопрос мы можем дать утвердительный ответ.

Будем говорить, что замкнутое множество $F \subset Q$ является отделяющим, если для любых двух открытых множеств G_1 и G_2, замыкания которых имеют непустое пересечение $\overline{G_1} \cap \overline{G_2}$, содержащееся в F, также и $G_1 \cap G_2 \neq \Lambda$.

Можно показать, что сумма двух отделяющих замкнутых множеств также представляет отделяющее множество.

Обозначим через $C_\infty(Q)$ множество всех непрерывных функций $x(t)$, заданных на Q и допускающих значения $\pm\infty$ на нигде не плотных, отделяющих множествах. Можно доказать, что при естественном упорядочении $C_\infty(Q)$ — K-линеал. Как и в теории K-пространств, единственное затруднение при этом заключается в установлении линейности множества $C_\infty(Q)$. Последнее же осуществляется с помощью леммы (ср. ([1]), стр. 514): если $F(\lambda, \mu)$ — непрерывная функция вещественных переменных, а $x(t)$ и $y(t)$ — функции, входящие в $C_\infty(Q)$, то сущест-

---

* Сумма двух функций $x(t)$ и $y(t)$ из $C_X(Q)$ определяется как такая функция (также из $C_X(Q)$), которая равна $x(t) + y(t)$ всюду, где $x(t)$ и $y(t)$ конечны. Существование такой функции доказывается.

** Определение нормальности K-линеала можно, конечно, сформулировать и не прибегая к его представлению с помощью непрерывных функций.

вует единственная функция $z(t)$ из $C_\infty(Q)$ такая, что

$$z(t) = F[x(t),\ y(t)]$$

при всех t, для которых $x(t)$ и $y(t)$ одновременно конечны.

Построение функции $z(t)$ проводится в нашем случае так же, как в теории K-пространств, а именно $z(t) = u_{\min}(t)$, где

$$u(t) = \begin{cases} F[x(t),\ y(t)] & \text{в тех точках, где } x(t) \text{ и } y(t) \text{ конечны,} \\ +\infty & \text{в прочих точках.} \end{cases}$$

Однако доказательство того, что $z(t)$ входит в $C_\infty(Q)$, в нашем случае несколько сложнее, в частности, используется отмеченная выше аддитивность класса отделяющих множеств.

Применяя лемму к функции $F(\lambda, \mu) = \lambda + \mu$, мы сразу получим, что в $C_\infty(Q)$ имеет смысл сумма $x + y$ для любых $x, y \in C_\infty(Q)$, а из теоремы о сохранении соотношений ((1), стр. 521), которая остается верной и в нашем случае, сразу вытекает, что сумма $x + y$ обладает обычными алгебраическими свойствами.

Теорема 2. *K-линеал $C_\infty(Q)$ представляет максимальное расширение K-линеала $C(Q)$.*

Наметим доказательство этой теоремы. Прежде всего ясно, что $C_\infty(Q)$ — расширение K-линеала $C(Q)$. Возьмем произвольный нормальный K-линеал X, представляющий расширение K-линеала $C(Q)$. Согласно п. 1, K-линеал X изоморфен некоторому нормальному K-линеалу $C_X(Q)$, состоящему из непрерывных функций на Q. Покажем, что $C_X(Q) \subset C_\infty(Q)$. Для этого нужно показать, что для любой функции $x(t)$ из $C_X(Q)$ множество $F = Q_t(|x(t)| = +\infty)$ — отделяющее.

Допустим, что для некоторой функции $x(t)$ это не так. Тогда существуют два таких открытых множества G_1, G_2, что $G_1 \cap G_2 = \Lambda$, $\Phi = \overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 \neq \Lambda$, $\Phi \subset F$.

Положим $\xi(t) = |x(t)| + \alpha$, где $\alpha > 0$. Эта функция $\xi(t)$ также входит в $C_X(Q)$, а $Q_t(\xi(t) = +\infty) = F$. Теперь определим на $\overline{G}_1 \cup \overline{G}_2$ непрерывную функцию $y(t)$ следующим образом:

$$y(t) = \begin{cases} \xi(t) & \text{на } \overline{G}_1, \\ |x(t)| & \text{на } \overline{G}_2; \end{cases}$$

затем продолжим $y(t)$ на все Q с сохранением непрерывности и положительности и положим

$$z(t) = y(t) \wedge \xi(t).$$

Вследствие нормальности X $z(t)$ входит в $C_X(Q)$, а тогда должна существовать непрерывная функция $u(t)$, равная разности $\xi(t) - z(t)$ всюду, где эти функции конечны. Однако в точках $t_0 \in \Phi$ не существует $\lim\limits_{t \to t_0} [\xi(t) - z(t)]$, так как в любой окрестности такой точки найдутся точки из G_1, где $\xi(t) = z(t)$, и точки из G_2, где $\xi(t) = z(t) + \alpha$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Заметим, что если нормальный K-линеал X представляет расширение K-линеала $C(Q)$ (для простоты будем считать, что $C(Q) \subset X$), то погружение X в $C_\infty(Q)$, при котором элементы из $C(Q)$ переходят сами в себя, единственно.

Как следствие из теоремы 2 можно получить, что если бикомпакт Q метризуем, то для K-линеала $C(Q)$ невозможно нетривиальное (т. е. отличное от него самого) нормальное расширение; другими словами, $C_\infty(Q) = C(Q)$. Это следует из того, что в метрическом пространстве нет нигде не плотных отделяющих множеств.

Поступило
7 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, 1950. [2] М. Г. Крейн и С. Г. Крейн, ДАН, 27, 427 (1940).