Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 6

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. А. ПУДОВКИН

К РАСЧЕТУ ИЗОГНУТОЙ ОСИ БРУСА

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 24 II 1951)

При расчете балок на изгиб приходится определять элементы (прогиб, перерезывающую силу, изгибающий момент и т. п.), характеризующие деформированное состояние бруса. Эти элементы вызываются одновременным действием нагрузок дискретно-непрерывного характера. Здесь мы показываем, что указанные элементы могут быть найдены при любых случаях загружения и любых случаях закрепления концов бруса из общего уравнения при использовании обобщенного интеграла Стильтьеса — Канторовича [1–3].

Известно, что задачи изгиба бруса сводятся к решению уравнения вида:

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}(x)\, y^{(i)} = f(x) \tag{1}$$

с краевыми начальными условиями $y^{(i)}(0)$ $(i = 0,\ 1,\ 2,, \ldots,\ n-1)$, при которых (1) имеет единственное решение. Вообще говоря, коэффициенты $a_k(x)$ и их производные будут иметь разрывы 1-го рода в конечном числе точек.

Скачки разрывов $\Delta a_k^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots,\ n-1)$ вточках $C_{j,k}^{i}$ считаем известными.

Функция $f(x)$, характеризующая внешнюю нагрузку, действующую на балку, и интегралы от нее имеют разрывный характер с известными разрывами первого рода в конечном числе точек. Ясно, что при упомянутых условиях, налагаемых на $a_k(x)$ и $f(x)$, решение $y(x)$ следует искать в классе разрывных функций с разрывными производными. Считаем, что производные от $a_{n-i}(x)$ имеют разрывы до $(i-1)$-го порядка $(i = 2,\ 3, \ldots,\ n-1)$. Этот случай и представляет интерес для задач строительной механики.

Интегрируя уравнение (1) n раз в пределах от 0 до x, приходим после преобразования к однократному интегралу:

$$y + \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, a_{n-i}(t)\, y^{(i)}(t)\, dt = F(x). \tag{2}$$

Интегрируя по частям каждое слагаемое суммы (2) соответственно i раз для каждого i и пользуясь представлением интеграла Стильтьеса через обычный интеграл, равенство (2) преобразуем к виду:

$$y+\int\limits_0^x\left\{\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{(i)}\left[\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}a_{n-i}(t)\right]_t^{(i)}\right\}y(t)\,dt+ \tag{3}$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{n-1}y^{(\sigma-1)}(0)\sum_{\sigma=k}^{n-1}\sum_{i=1}^{k+1-\sigma}(-1)^i C_{k-\sigma}^{k+1-\sigma-i}\frac{x^{n-2-k+\sigma+i}}{(n-2-k+\sigma+i)!}a_{n-k}^{(i-1)}(0)+$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{\sigma=k}^{n-1}\sum_{i=1}^{k+1-\sigma}(-1)^i C_{k-\sigma}^{k+1-\sigma-i}\sum_j y^{(\sigma-1)}(b_{j,n-k}^{i-1})\frac{\left(x-b_{j,n-k}^{i-1}\right)^{n-2-k+\sigma+i}}{[n-2-k+\sigma+i]!}\Delta a_{n-k}^{i-1}=F(x),$$

где C_p^q — число сочетаний из p по q; b_j^λ — точки, в которых a_j^k $(k, j = 1, 2, \ldots, n-1)$ делают скачки Δ_j^k.

Легко усмотреть, что правая часть (2) представляет обобщенный интеграл Стильтьеса — Канторовича [2]:

$$\int\limits_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^n\psi(t)}{dt^{n-1}}, \tag{4}$$

где $\psi(t)$ — функция прогиба. Каноническое представление интеграла (4) через обычный интеграл дается формулой:

$$\int\limits_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^n\psi(t)}{dt^{n-1}}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x^k}{k}\psi^{(k)}(0)+\sum_j\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(x-C_j^k\right)^{k-1}}{(k-1)!}\Delta\psi^{(k-1)}(C_j^k)+$$

$$+\int\limits_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\psi^{(n)}(t)\,dt, \tag{5}$$

где $\Delta\psi^{(k-1)}(C_j^k)$ — величина скачков функции $\psi(x)$ и ее производных в точках $C_j^k < x$.

Формула (5) получается непосредственно из понятия разрывных первообразных 1-го, 2-го, ..., n-го порядков со скачками 1-го рода. Последние выделяются разбиением промежутка $(0, x)$ на участки точками, в которых имеются разрывы, и применением формулы интегрирования по частям. Запись правой части (2) в форме (4) имеет преимущества, которые заключаются в том, что интеграл (4), одновременно пригоден для непрерывных и разрывных функций прогиба вместе с их $(n-1)$-ми производными. Функция прогиба $\psi(t)$ в (4), будучи непрерывна вместе с производными, позволяет записать правую часть (2) в обычной форме:

$$\int\limits_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt \quad \text{(при нулевых начальных условиях).}$$

Но последнее выражение имеет место только в том случае, если интенсивность внешней нагрузки — непрерывная функция x, т. е. при отсутствии сосредоточенных сил, моментов и т. п.

Обозначая выражение в фигурных скобках под интегралом (3) через $K(x, t)$, перенося суммы из (3) вправо, учитывая (4) и (5) и обозначив правую часть через $\Phi(x)$, приводим решение поставленной задачи к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода с $\lambda = -1$ и регулярным ядром:

$$y + \int_0^x K(x, t)\, y(t)\, dt = \Phi(x), \tag{6}$$

Решение (6) может быть дано в форме:

$$y = \Phi(x) - \int_0^x R(x, t; \lambda)\, \Phi(t)\, dt, \tag{7}$$

где $R(x, t; \lambda)$ — резольвента ядра $K(x, t)$. Другие элементы (угловой коэффициент линии прогиба, момент, перерезывающая сила) найдутся дифференцированием (7).

Формулы, преобразующие левую часть (2), сильно упрощаются, если предположить, что коэффициенты $a_k(x)$ имеют разрывный характер в $(0, x)$, как и выше, а производные от них непрерывны и дифференцируемы до $(n-1)$-го порядка.

Так, уравнение, аналогичное (3), имеет вид:

$$y + \int_0^x \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \left[\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} a_{n-i}(t)\right]_t^{(i)} y(t)\, dt =$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{n-1} y^{(\sigma-1)}(0) \sum_{\sigma=k}^{n-1} \sum_{i=1}^{k+1-\sigma} (-1)^{i+1} C_{k-\sigma}^{k+1-\sigma+i} \frac{x^{n-2-k+\sigma+i}}{[n-2-k+\sigma+i]\,!} a_{n-k}^{i-1} +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{x^\nu}{\nu!} \psi^{(i)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^n \psi(t)}{dt^{n-1}}\,. \tag{3'}$$

Изложенный метод может быть иллюстрирован примерами. Например, получается более общее решение задачи о прогибе при разрывной жесткости вращающихся валов, находящихся под действием продольных сил и различных внешних нагрузок, чем решение по известному методу А. Н. Крылова. Также, как показывает вычисление, получается более общее решение задачи о балке с разрывной жесткостью, лежащей на упругом основании, при действии на нее разрывных нагрузок.

Поступило
8 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Канторович, ДАН, **4**, № 8—9 (1934). [2] Н. А. Столяров, ДАН, **70**, № 1 (1950). [2] М. А. Пудовкин, Уч. зап. КГУ, **109**, в. 1 (1949).