

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. М. КАЧАНОВ

**УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА ЗА ПРЕДЕЛОМ
УПРУГОСТИ**

(Представлено академиком В. И. Смирновым 15 I 1951)

Явление потери устойчивости плоской формы изгиба идеально упругих полос было изучено в работах Прандтля, Майчеля, Тимошенко и других авторов. Вопрос об устойчивости плоской формы изгиба при упруго-пластических деформациях подробно обсуждается в книге С. П. Тимошенко (1), который рекомендует пользоваться модулем Кармана вместо модуля упругости. В настоящей работе рассматривается вопрос об устойчивости плоской формы изгиба за пределом упругости на основе теории малых упруго-пластических деформаций.

Рассмотрим криволинейную полосу прямоугольного поперечного сечения, ось которой до потери устойчивости является плоской кривой. Полоса изгибается в своей плоскости силами и моментами, причем возникают области пластической деформации. Пусть x, y, z — триэдр подвижных осей, причем ось z направлена по оси полосы.

Уравнения Кирхгофа — Клебша имеют вид

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{V}}{ds} + [\vec{\omega}, \mathbf{V}] + \mathbf{F} = 0, \quad \frac{\tilde{d}\mathbf{L}}{ds} + [\vec{\omega}, \mathbf{L}] + [\vec{\tau}, \mathbf{V}] = 0; \quad (1)$$

$$\vec{\tau} - \vec{\tau}_0 = [\vec{\omega}, \mathbf{u}] + \frac{\tilde{d}\mathbf{u}}{ds}, \quad \vec{\omega} - \vec{\omega}_0 = \frac{\tilde{d}\vec{\theta}}{ds}, \quad (2)$$

где \mathbf{V}, \mathbf{L} — векторы усилия и момента; \mathbf{F} — вектор внешней нагрузки; $\vec{\omega}(p, q, r)$ — вектор кривизны и кручения; величины V_y, L_x, L_z, F_y, p, r считаем малыми, рассматривая их как «возмущения»; $\vec{\tau}$ — единичный вектор касательной; \mathbf{u} — вектор смещения; $\vec{\theta}$ — вектор поворота. Нулевым индексом отличаются соответствующие величины в начальном состоянии. Уравнения Кирхгофа — Клебша связывают 15 неизвестных величин. Для упругих полос дополнительными уравнениями служат соотношения Кирхгофа

$$L_x = A_0 p, \quad L_y = B_0 (q - q_0), \quad L_z = C_0 r, \quad (3)$$

где A_0, B_0 — жесткости при изгибе, а C_0 — жесткость при кручении. В нашу задачу входит установление аналогичных соотношений применительно к вопросам устойчивости в случае упруго-пластической деформации.

Рассмотрим прямую полосу ($p_0 = q_0 = r_0 = 0$); пусть $V_{z0} = 0$ и после выпучивания внешние силы сохраняют прежние величину и направ-

ление. Тогда из (1) следует, что $L_y - L_{y0}$ является величиной второго порядка малости. За пределом упругости выполняется условие пластичности Мизеса. При $|x| < \xi$ (рис. 1) мы имеем упругое ядро, при $|x| > \xi$ — пластические зоны, причем

$$\zeta = \frac{\xi}{h} = \sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{|L_y|}{M_s}} \quad (0 \leq \zeta \leq 1), \quad (4)$$

где L_y — изгибающий момент, а $M_s = \sigma_s b h^2$ — предельный момент, σ_s — предел текучести.

При бесконечно малом выпучивании полоса испытывает дополнительные деформации. Так же как и в упругом случае, эти деформации состоят из изгиба полосы и скручивания ее. Компонентами напряжения σ_x , τ_{yz} , τ_{xy} можно пренебрегать, так как боковые поверхности полосы свободны от напряжений, а толщина полосы мала; напряжением σ_x также пренебрегаем, поскольку давление волокон друг на друга отсутствует при изгибе и при кручении. Но тогда следует учитывать лишь сдвиг γ_{xz} , характеризующий скручивание полосы. Как при упругом, так и при пластическом кручении и изгибе деформации носят одинаковый характер, поэтому мы принимаем, что при выпучивании приращения деформаций равны:

$$\delta \varepsilon_z = \kappa_2 x + \kappa_1 y, \quad \delta \gamma_{xz} = -2 \kappa_3 y, \quad (5)$$

где κ_1 , κ_2 — изменения кривизн, а κ_3 — кручения на единицу длины. При выпучивании часть сечения будет испытывать нагрузку, часть — разгрузку, соответственно знаку работы деформации $T \delta \Gamma$ (T, Γ — интенсивности напряжения и деформации). Нетрудно видеть, что нагрузка и разгрузка различаются по знаку $\delta \varepsilon_z$; граница определяется уравнением $\delta \varepsilon_z = 0$, определяющим линию раздела

($m-m$ на рис. 1).

В упругой области S_y и зонах разгрузки справедлив закон Гука

$$\delta \sigma_z = E \delta \varepsilon_z, \quad \delta \tau_{xz} = G \delta \gamma_{xz}. \quad (6)$$

В зонах нагружения (S'_n или S''_n) напряжения и деформации связаны уравнениями теории малых упруго-пластических деформаций; тогда, при коэффициенте Пуассона $\nu = 1/3$,

$$\delta \sigma_z = 0, \quad \delta \tau_{xz} = -6 E \kappa_3 \frac{y}{\frac{9}{\xi} \frac{|x|}{\xi} - 1}. \quad (7)$$

Используя (6), (7) и указанное ранее условие $L_y - L_{y0} = 0$, находим уравнение, определяющее положение линии раздела в зависимости от ζ (рис. 2):

$$\Psi = \frac{4}{3} \frac{1 + \zeta^3}{1 - \zeta^4} - \sqrt{\left(\frac{4}{3} \frac{1 + \zeta^3}{1 - \zeta^4}\right)^2 - \frac{2}{1 + \zeta^2}} \quad \text{при } \Psi \leq 1, \quad (8)$$

$$\Psi = \frac{1}{3\zeta} \quad \text{при } 1 \leq \Psi \leq \frac{1}{\zeta},$$

где $\Psi = \frac{h}{b} \operatorname{ctg} \omega = -\frac{h}{b} \frac{x_2}{x_1}$. Линия раздела всегда пересекает область пластической деформации. Вычисляя вариации моментов

$$L_x = \iint \delta \sigma_z y dx dy, \quad L_z = -2 \iint \delta \tau_{xz} y dx dy,$$

находим в силу (8) соотношения

$$L_x = A(\zeta) p, \quad L_z = C(\zeta) r, \quad (9)$$

где от обозначений x_1, x_3 мы вернулись к прежним обозначениям p, r . При этом

$$A(\zeta) = A_0 A^*(\zeta), \quad C(\zeta) = C_0 C^*(\zeta), \quad A_0 = \frac{1}{3} E b^3 h, \quad C_0 = 2 E b^3 h;$$

$$A^*(\zeta) = \begin{cases} \frac{32}{27} \zeta & \text{при } \zeta \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} [(1 + \zeta) - (1 - \zeta^2) \Psi + \frac{1}{3} (1 + \zeta^3) \Psi^2] & \text{при } \zeta \geq \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (10)$$

Аналитического выражения $C^*(\zeta)$ мы не приводим ввиду его громоздкости, ограничиваясь графиком $C^*(\zeta)$ (рис. 2).

Следуя схеме построения теории тонких стержней, рассматриваем (9) как дифференциальные соотношения. При этом $A(\zeta), C(\zeta)$ будут известными функциями s ; используя уравнения Кирхгофа — Клебша, мы придем к обыкновенным однородным линейным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами при однородных краевых условиях. Критическая нагрузка будет соответствовать одному из собственных значений задачи.

Эффективное вычисление собственных значений осуществляется методом Ритца, исходя из вариационной формулировки; последняя может быть установлена также непосредственно, так как (9) можно рассматривать как соотношения задачи об устойчивости плоской формы изгиба упругой полосы переменного сечения. При этом следует разыскивать минимум гибкости полосы $\lambda = M_s l / \sqrt{A_0 C_0}$ при данном параметре нагрузки $\mu = |L_y|_{\max} / M_s$; по сравнению с упругими задачами решение упруго-пластических задач лишь несколько сложнее (в смысле вычисления квадратур). На решении конкретных задач мы не останавливаемся, отметим лишь, что плоская форма изгиба оказывается устойчивой при деформациях за пределом упругости и что рекомендация С. П. Тимошенко неудовлетворительна. Общая схема решения сохраняет значение и для материала с упрочнением. Мы рассмотрели случай линейного упрочнения. При этом анализ, естественно, усложняется, поскольку все соотношения содержат дополнительный параметр $k = \frac{8(G - G_*)}{8G + G_*}$ ($0 \leq k \leq 1$), где G — модуль упрочнения. Кривые $\Psi(\zeta, k)$ располагаются между кривой Ψ (рис. 2) и осью ζ , приближаясь

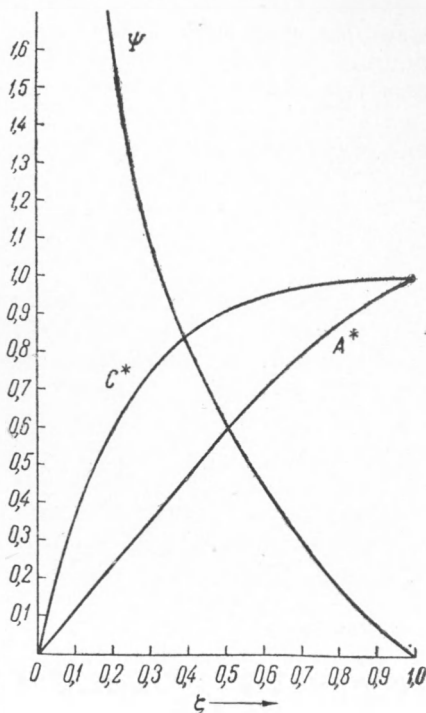


Рис. 2

кривой Ψ (рис. 2) и осью ζ , приближаясь

кривой Ψ (рис. 2) и осью ζ , приближаясь

к последней с уменьшением k ; кривые $\Psi(\zeta, k)$ пересекают ось ординат при $\zeta = 0$ и $k < 1$ под прямым углом; далее, $d\Psi/d\zeta < 0$ при $\zeta > 0$.

Кривые $A^*(\zeta, k)$ ($C^*(\zeta, k)$) располагаются между кривой $A^*(\zeta, 1)$ ($C^*(\zeta, 1)$) рис. 2 и значением $A^* = 1$ ($C^* = 1$), соответствующим идеально упругой полосе, приближаясь к последнему с уменьшением k . Аналогичный характер имеет расположение границ устойчивости в частных задачах при различных k .

Поступило
11 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. П. Тимошенко, Устойчивость упругих систем, 1946.