Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 6

ГИДРОМЕХАНИКА

Бл. ДОЛАПЧИЕВ

ОБОБЩАЮЩИЙ ПРИЕМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ ВИХРЕВЫХ ДОРОЖЕК

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 27 II 1951)

В настоящей заметке мы даем простой и самый общий вывод необходимых условий равновесия вихревой дорожки при произвольном взаимном расположении двух ее параллельных цепочек. Эти условия позволяют судить об устойчивости или неустойчивости каждого из трех возможных расположений: а) симметричные дорожки, б) дорожки с шахматным расположением вихрей и в) асимметричные дорожки. С этой целью, с одной стороны, мы используем метод Кочина для малых смещений вихрей в том его виде, в каком он ([1]) прилагается для случаев а) и б), а с другой стороны, используем способ решения дифференциальных уравнений для возмущенных движений вихрей, изложенный в нашей работе ([2]).

Прибегая, как обычно, к альтернативному рассечению вихревой системы (вихри с четным индексом в одной цепочке получают одни и те же смещения, а вихри с нечетным индексом — другие, причем для каждой из двух цепочек эти смещения различны, следовательно, два соседних вихря получают различные смещения) и вводя, соответственно, смещения $\delta z_1'$, $\delta z_2'$, $\delta z_1''$, $\delta z_2''$ (индекс $'$ относится к верхней цепочке, а индекс $''$ — к нижней), которые, в частности, подчиняются условиям $\delta z_2' = -\delta z_1'$, $\delta z_2'' = -\delta z_1''$, Кочин получает систему:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta \bar{z}_1') &= -\frac{\Gamma\pi}{8l^2 i}(A\delta z_1' + B\delta z_1''), \\ \frac{d}{dt}(\delta \bar{z}_1'') &= \frac{\Gamma\pi}{8l^2 i}(B\delta z_1' + A\delta z_1''), \end{aligned} \qquad (1)$$

где

$$\begin{aligned} A &= 2 - \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha}, \\ B &= \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha}, \end{aligned} \qquad (2)$$

а

$$\alpha = \frac{\pi}{2}(\lambda + i\varkappa), \quad \lambda = \frac{d}{l}, \quad \varkappa = \frac{h}{l}. \qquad (3)$$

Здесь $2h$ обозначает ширину дорожки, $2l$ — расстояние двух соседних вихрей от одной и той же цепочки, а $2d$ — сдвиг одной вихревой цепочки относительно другой. Имеем: при $d = 0$ ($\lambda = 0$) вихревые цепочки находятся точно одна под другой (симметричное расположение); при $d = l/2$ ($\lambda = 1/2$) они сдвинуты одна относительно другой из симметричного расположения на величину l (шахматное расположение); при $d < l/2$ ($\lambda < 1/2$) они сдвинуты на произвольную величину, меньшую l (асимметричное расположение). Положим для краткости в (1) $q = \Gamma\pi/8l^2$ и

$$\delta z_1' = \xi' + i\eta' = Z', \quad \delta z_1'' = \xi'' + i\eta'' = Z''. \qquad (4)$$

Тогда система (1) превратится в

$$\frac{d\overline{Z}'}{dt} = qi\,(AZ' + BZ''),$$
$$\frac{d\overline{Z}''}{dt} = -\,qi\,(BZ' + AZ''). \tag{5}$$

Если сложить, а затем вычесть левые и правые части уравнений (5), то получим

$$\frac{d}{dt}\,(\overline{Z}' + \overline{Z}'') = qi\,(A - B)\,(Z' - Z''),$$
$$\frac{d}{dt}\,(\overline{Z}' - \overline{Z}'') = qi\,(A + B)\,(Z' + Z''). \tag{6}$$

Но из (2) находим

$$A + B = -\,2\operatorname{tg}^2\alpha, \quad A - B = -\,2\operatorname{ctg}^2\alpha, \tag{7}$$

а из (4) получаем

$$Z' + Z'' = (\xi' + \xi'') + i\,(\eta' + \eta'') = X + iY = Z,$$
$$Z' - Z'' = (\xi' - \xi'') + i\,(\eta' - \eta'') = \overline{X} + i\overline{Y} = W,$$
$$\overline{Z}' + \overline{Z}'' = (\xi' + \xi'') - i\,(\eta' + \eta'') = X - iY = \overline{Z},$$
$$\overline{Z}' - \overline{Z}'' = (\xi' - \xi'') - i\,(\eta' - \eta'') = \overline{X} - i\overline{Y} = \overline{W}. \tag{8}$$

Теперь (6) обратится в

$$\frac{d\overline{Z}}{dt} = qi\,(A - B)\,W = \overline{q}i\,\frac{W}{T},$$
$$\frac{d\overline{W}}{dt} = qi\,(A + B)\,Z = \overline{q}i\,TZ, \qquad (\overline{q} = -\,2q) \tag{9}$$

где $T = \operatorname{tg}^2\alpha$.

Для того чтобы можно было представить систему (9) в реальной форме с помощью системы четырех дифференциальных уравнений для смещений, напишем выражение для T в виде

$$T = P + iQ, \quad \frac{1}{T} = \overline{P} + i\overline{Q} = \frac{P - iQ}{P^2 + Q^2} \tag{10}$$

и используем значение α из (3). Имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\lambda\pi + i\operatorname{sh}\varkappa\pi}{\cos^2\frac{\lambda\pi}{2} + \operatorname{sh}^2\frac{\varkappa\pi}{2}}. \tag{11}$$

Наконец, получим

$$P = \frac{1}{4}\,\frac{\sin^2\lambda\pi - \operatorname{sh}^2\varkappa\pi}{\left(\cos^2\frac{\lambda\pi}{2} + \operatorname{sh}^2\frac{\varkappa\pi}{2}\right)^2}, \quad Q = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\lambda\pi\operatorname{sh}\varkappa\pi}{\left(\cos^2\frac{\lambda\pi}{2} + \operatorname{sh}^2\frac{\varkappa\pi}{1}\right)^2}, \tag{12}$$

$$\overline{P} = \frac{P}{P^2 + Q^2}, \quad \overline{Q} = \frac{-Q}{P^2 + Q^2}. \tag{13}$$

С помощью (9) и (8) можем написать

$$\frac{d}{dt}\,(X - iY) = \overline{q}i\,(\overline{P} + i\overline{Q})\,(\overline{X} + i\overline{Y}),$$
$$\frac{d}{dt}\,(\overline{X} - i\overline{Y}) = \overline{q}i\,(P + iQ)\,(X + iY), \tag{14}$$

откуда реальная система имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dX}{dt}=\bar{q}\,(\bar{P}\bar{X}-\bar{Q}\bar{Y}), \quad \frac{dY}{dt}=-\bar{q}\,(\bar{P}\bar{Y}+\bar{Q}\bar{X}),\\
&\frac{d\bar{X}}{dt}=q\,(PX-QY), \quad \frac{d\bar{Y}}{dt}=-q\,(PY+QX).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Приняв за частные решения вышеприведенной системы выражения $X=Me^{\omega t}$, $\bar{X}=Ne^{\omega t}$, $Y=Re^{\omega t}$, $\bar{Y}=Se^{\omega t}$, находим алгебраическую систему уравнений, однородную относительно M, N, R, S:

$$
\begin{aligned}
&\omega M-\bar{q}\bar{P}N+\bar{q}\bar{Q}S=0,\\
&\omega R+\bar{q}\bar{P}S+\bar{q}\bar{Q}N=0,\\
&\omega N-\bar{q}PM+\bar{q}QR=0,\\
&\omega S+\bar{q}PQ+\bar{q}QM=0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Условие совместности этой системы приводит нас к уравнению

$$
\omega^4-2\bar{q}^2(P\bar{P}+Q\bar{Q})\,\omega^2+\bar{q}^4(P^2\bar{P}^2+Q^2\bar{Q}^2+\bar{P}^2Q^2+P^2\bar{Q}^2)=0, \tag{17}
$$

корнями которого являются

$$
\omega_{1,2,3,4}=\pm\bar{q}\sqrt{P\bar{P}+Q\bar{Q}\pm i\,(\bar{P}Q-P\bar{Q})}. \tag{18}
$$

Внеся (13) в (18), для корней ω получим

$$
\omega=\pm\bar{q}\,\frac{P\pm iQ}{\sqrt{P^2+Q^2}}=\pm K\,(P\pm iQ), \tag{19}
$$

где $K=\frac{\bar{q}}{\sqrt{P^2+Q^2}}$.

Решения системы дифференциальных уравнений (15) относительно переменных смещений X, Y, $\bar{X}$, $\bar{Y}$ имеют вид $e^{\pm KPt}\cos KQt$ и $e^{\pm KPt}\sin KQt$; с увеличением t эти смещения увеличиваются неограниченно вследствие наличия положительных показателей в показательных функциях. Следовательно, каково бы ни было расположение вихрей у дорожки, последняя в случае $P\neq 0$ оказывается всегда неустойчивой. Для устойчивости необходимо, чтобы P было равно нулю. Из (12), таким образом, следует, что наиболее общим необходимым условием устойчивости будет условие

$$
\operatorname{sh}\varkappa\pi=\sin\lambda\pi, \tag{20}
$$

полученное нами ранее другим способом ([3]).

Итак, мы установили, что асимметричная дорожка может также быть устойчивой, лишь бы только параметры λ и $\varkappa$ удовлетворяли соотношению (20). Из условия (20) при $\lambda={}^1/_2$ получается уже известное условие устойчивости кармановых шахматных вихревых дорожек, а именно необходимое условие

$$
\operatorname{sh}\varkappa\pi=1. \tag{21}
$$

Что касается симметричных дорожек, для которых $\lambda=0$, то из (12) следует, что в этом случае $Q=0$, а из (19), что $\omega=\pm 2\bar{q}$; последнее обозначает существование решений вида $e^{-2\bar{q}t}$ $(\bar{q}<0)$ — факт, подтверждающий неустойчивость симметричных расположений.

Вернемся к устойчивым асимметричным дорожкам. Здесь не нужно забывать, что, допуская возможность таких расположений, мы допускаем возможность косого протекания вихревых дорожек, при котором ось вихревой системы, сохраняя постоянное направление основного течения, перемещается параллельно самой себе, покидая положение оси симметрии обтекаемого тела.

Действительно, как это легко вывести для асимметричных расположений, компоненты скорости равны

$$U_A = \frac{\Gamma}{4l} \operatorname{th} \varkappa\pi \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda\pi}{\operatorname{tg}^2 \lambda\pi + \operatorname{th}^2 \varkappa\pi}, \quad V_A = -\frac{\Gamma}{4l} \operatorname{tg} \lambda\pi \frac{1 - \operatorname{th}^2 \varkappa\pi}{\operatorname{tg}^2 \lambda\pi + \operatorname{th}^2 \varkappa\pi}, \tag{22}$$

где $V_A \neq 0$, если $\lambda \neq 0$, $^1/_2$. Для $\lambda = 0$ (симметричные дорожки) имеем из (22)

$$U_S = \frac{\Gamma}{4l} \coth \varkappa\pi, \quad V_S = 0. \tag{23}$$

Для $\lambda = {}^1/_2$ (шахматные дорожки)

$$U_Z = \frac{\Gamma}{4l} \operatorname{th} \varkappa\pi, \quad V_Z = 0. \tag{24}$$

Добавим, что на основании формул (22), (23) (24), (20) и (21) легко установить, что имеет место зависимость

$$|\mathbf{W}_S| > |\mathbf{W}_A| > |\mathbf{W}_Z|, \tag{25}$$

т. е. что при определенном $\varkappa$, отвечающем какой-нибудь устойчивой двухпараметровой дорожке, последняя движется медленнее симметричной дорожки, но быстрее шахматной. В соответствии с вышеизложенным легко получается и то свойство, что при определенном расстоянии между вихрями $2l$ асимметричная дорожка всегда уже шахматной устойчивой дорожки, которая является последней стадией всевозможных положений равновесия. На последнем факте мы еще остановимся в нашей следующей работе. Здесь мы только отметим, что благодаря существованию устойчивых почти шахматных дорожек вполне объяснимо наличие таких соотношений, которые хотя и отличны от соотношения $\varkappa = h/l = 0{,}2805\ldots$, но близки к нему. В заключение заметим, что изложенная здесь теория устойчивости обобщенных (с двумя параметрами) дорожек при малых смещениях является только приближенной. Как это будет видно в следующем нашем сообщении, и эти дорожки, подобно шахматным, которые рассматривает Кочин, требуют ревизии теории. Мы как раз покажем далее, что и асимметричные дорожки, раз выполнено условие (20), могут рассматриваться, как это делает Кочин, как „наименее неустойчивые вихревые образования“.

Математический институт
София, Болгария

Поступило
10 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, гл. V, § 21, стр. 211, 1948. [2] Bl. Dolaptschiew, ZAMM, **17**, 313 (1937); Списание на Бълг. Академия на науките, **57**, 149 (1938). [3] Бл. Долапчиев, Годишник на Софийския университет, **39**, 287 (1942).