Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 6

МЕХАНИКА

Б. С. КОВАЛЬСКИЙ

БУНКЕРЫ С ГИБКОЙ СТЕНКОЙ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 23 II 1951)

Пусть бесконечно гибкая нить находится под воздействием вертикальной p и горизонтальной q нагрузок.

Из условия равновесия для элемента нити (рис. 1) имеем:

$$p\,dx = V(x+dx) - V(x) = H(x+dx)\operatorname{tg}\theta_{x+dx} - H(x)\operatorname{tg}\theta_x =$$
$$= [H(x) - q\,dy]\,(y' + dy') - H(x)\,y';$$

отбрасывая бесконечно малую второго порядка и деля на dx, получаем

$$H(x)\,y'' = qy'^2 + p. \qquad (1)$$

При $q=0$ (1) переходит в „обычное“ уравнение веревочной кривой (с $H = \mathrm{const}$); поэтому уравнение (1) можно рассматривать в качестве обобщения, расширяющего класс задач механики, решаемых с помощью веревочной кривой. Например, известная задача о форме бункера с гибкой стенкой, решения которой не имеется, легко решается с помощью (1).

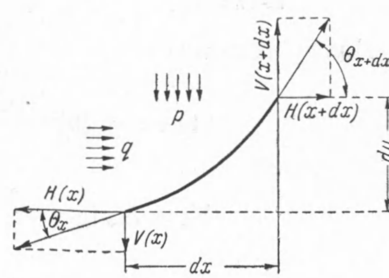

Рис. 1

Пренебрегая трением материала о стенки бункера, можно принять

$$p(y) = \gamma(h-y), \quad q(y) = mp(y), \quad m = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right),$$

где γ и ρ — насыпной вес и угол внутреннего трения материала.

Подставляя в (1) значения $p(y)$, $q(y)$ и

$$H(y) = H_0 - \frac{m\gamma}{2}\,[h^2 - (h-y)^2]$$

и обозначая $h - y = h\cos\varphi$, получаем

$$\frac{y'dy'}{1+my'^2} = \frac{\gamma\, h^2 \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi}{H_0 - \frac{m\gamma h^2}{2}\sin^2\varphi},$$

откуда, при условиях $y=0$, $\varphi=0$, $y'=0$, имеем

$$1 + my'^2 = (1 - 2k^2\sin^2\varphi)^{-2}, \quad k^2 = \frac{m\gamma h^2}{4H_0}.$$

Так как $y' = h \sin\varphi \frac{d\varphi}{dx}$, то непосредственно получаем

$$x = \sqrt{mh} \int_0^{\varphi} \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{(1-2k^2\sin^2\varphi)^{-2}-1}} = \frac{\sqrt{mh}}{k}\left[E(\varphi, k) - \frac{1}{2}F(\varphi, k)\right].$$

Таким образом, находим уравнение кривой стенки бункера в параметрической форме

$$\begin{aligned} y &= h(1-\cos\varphi), \\ x &= \frac{\sqrt{mh}}{k}\left[E(\varphi, k) - \frac{1}{2}F(\varphi, k)\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

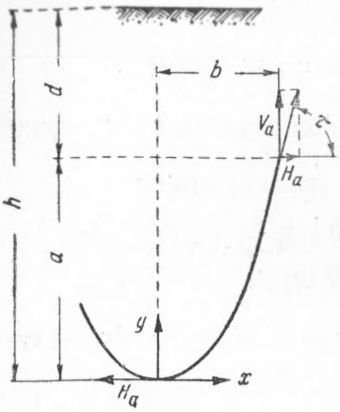

Рис. 2

Из условия $y(b) = a$ имеем

$$\begin{aligned} \cos\varphi_0 &= 1 - \frac{a}{h} = \frac{d}{h}, \\ \frac{b}{\sqrt{mh}} &= \frac{1}{k}\left[E(\varphi_0, k) - \frac{1}{2}F(\varphi_0, k)\right], \end{aligned} \tag{3}$$

что позволяет определить k, и затем,

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{m\gamma h^2}{4k^2}, \\ H_a &= H_0 - \frac{m\gamma(h^2-d^2)}{2} = \\ &= \frac{m\gamma h^2}{2}\left[\frac{1}{2k^2} - \left(1 - \frac{d^2}{h^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Далее находим:

$$\operatorname{tg}\tau = y'(b) = \frac{2k\sin\varphi_0\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_0}}{\sqrt{m}(1-2k^2\sin^2\varphi_0)}, \tag{5}$$

$$V_a = H_a \operatorname{tg}\tau = \frac{\sqrt{m}\gamma h^2}{2k}\sin\varphi_0\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_0}, \tag{6}$$

причем очевидно, что $2V_a$ — вес материала в бункере.

Из выражений для H_a и τ следует, что:

при $\frac{1}{k^2} < 2\sin^2\varphi_0 = 2\left(1 - \frac{d^2}{h^2}\right) \quad H_a < 0, \quad \tau > \frac{\pi}{2}$;

при $\frac{1}{k^2} > 2\sin^2\varphi_0 \quad H_a > 0, \quad \tau < \frac{\pi}{2}$.

Первый из этих случаев для бункеров практического значения не имеет, так как отвечает нереально низким значениям b/a.

Чем выше значение угла внутреннего трения ρ, тем меньше, конечно, влияние горизонтального давления материала q. При $m = 0$ легко получить решение в виде

$$y = h\left\{1 - \cos\left(\frac{x}{b}\arccos\frac{d}{h}\right)\right\}. \tag{7}$$

Как решение (2), так и приближенное решение (7) указывают на ошибочность термина „параболические бункеры", вошедшего в инженерную практику из американских литературных источников, в которых вовсе пренебрегается влиянием горизонтальной нагрузки, а вертикальная нагрузка определяется грубо приближенным законом $p = c(b - |x|)$.

Аналогично рассмотренной задаче о бункере с гибкой стенкой решается задача о форме каменного свода, нагруженного давлением

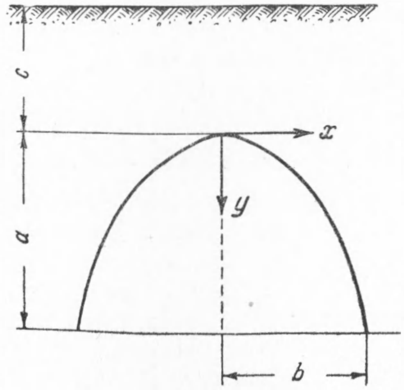

Рис. 3

засыпки (рис. 3). В этом случае уравнение веревочной кривой имеет вид

$$y = c(\sec\varphi - 1),$$

$$x = \frac{\sqrt{mc}}{\sqrt{1-k^2}}\left[\frac{k^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \left(1 - \frac{k^2}{2}\right)F(\varphi, k) - E(\varphi, k)\right], \qquad (8)$$

где

$$\frac{1}{k^2} = 1 + \frac{m\gamma c^2}{4H_0},$$

и определяется из (8) при $x = b,\ y = a$.

Поступило
25 I 1951