Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 1

ГИДРОМЕХАНИКА

Бл. ДОЛАПЧИЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ СПОСОБОВ Н. Е. КОЧИНА К ИССЛЕДОВАНИЮ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ДВУХПАРАМЕТРОВЫХ ВИХРЕВЫХ ДОРОЖЕК

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 27 II 1951)

При исследовании вопроса об устойчивости вихревой дорожки с шахматным расположением вихрей, когда имеют место «групповые смещения» (например альтернативные), или при нахождении скорости асимметричной дорожки мы всегда сталкиваемся с эффектом косого протекания дорожки. Это значит, что ось вихревой системы, сохраняя направление, параллельное общему движению, с течением времени перемещается, неограниченно удаляясь от оси симметрии обтекаемого тела (цилиндра). В случае шахматной дорожки, смещенной альтернативно, мы получаем для закона движения, например для вихря с четным индексом верхней цепочки, выражение ([1,2])

$$\xi'_{2i}(t) = \frac{\xi'_0 + \xi'_1}{2} + \frac{\lambda}{2}\{(\eta'_0 + \eta'_1) - (\eta''_0 + \eta''_1)\}\, t +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[e^{\mu t}(a' \cos \nu t + b'' \sin \nu t) + e^{-\mu t}(a' \cos \nu t + b'' \sin \nu t)\right] \qquad (1)$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots;\ \mu = 0 \equiv \varkappa = h/l \approx 0{,}281).$$

В случае асимметричной дорожки косое протекание вытекает из факта, что для второй составляющей V_A скорости $\mathbf{W}$ любого вихря системы имеет значение

$$V_A = -\frac{\Gamma}{4l}\frac{\sin(2\lambda\pi)}{\operatorname{ch}(2\varkappa\pi) - \cos(2\lambda\pi)}, \qquad U_A = \frac{\Gamma}{4l}\frac{\operatorname{sh}(2\varkappa\pi)}{\operatorname{ch}(2\varkappa\pi) - \cos(2\lambda\pi)} \qquad (2)$$

которое при $\lambda \neq 0, {}^1/_2$ тоже отлично от нуля. На основании вышеуказанного можно было бы утверждать, что не только асимметричная дорожка, но также и шахматная вихревая дорожка, даже и тогда, когда она удовлетворяет условию Кармана ([3])

$$\operatorname{sh} \varkappa\pi = 1, \qquad (3)$$

$\varkappa = h/l$, неустойчива, поскольку для нее можно найти такие специальные смещения, которые вызывают косое передвижение ее. Действительно, в указанных случаях не соблюдается общее определение устойчивости, согласно которому необходимо, чтобы «при произвольно малых смещениях всех или некоторых вихрей в начальный момент времени все вихри с течением времени оставались вблизи тех положений, которые они имели бы, если бы двигались, не подвергаясь смещениям». Отказавшись от этого общего определения, допустим на миг возможность косого передвижения вихревых систем, например асимметричных дорожек. Нам предстоит исследовать их устойчивость или неустойчивость при более узком определении устойчивости, которое формулируется Н. Е. Кочиным ([3]) так: «Будем называть систему вихрей устойчивой, если для любого положительного сколь угодно малого числа ε можно указать такое положительное число δ, что при смещениях вихрей, не превосходящих в начальный момент времени величины δ, расстояние между любыми двумя вихрями во все время движения будет отличаться от расстояния между этими вихрями в невозмущенном состоянии системы не больше, чем на ε».

Итак, нам предстоит рассмотреть в духе вышеприведенного определения вопрос об устойчивости или неустойчивости асимметричных вихревых дорожек, так как по отношению к шахматным дорожкам мы установили раньше ([1, 2]), что они устойчивы по условию (3) даже и при смещениях 2-го порядка. Однако, как выводит Н. Е. Кочин ([3]), следуя методу Ляпунова, при привлечении смещений 4-го порядка шахматные дорожки оказываются неустойчивыми, несмотря на то, что условие (3) выполнено. Аналогия, установленная здесь согласно способу Кочина в поведении асимметричных и шахматных дорожек, тем более ценна, что в следующей работе мы применим асимметричные дорожки в качестве переходных к кармановой шахматной дорожке, когда они как бы «делаются устойчивыми» в последней стадии движения двух колеблющихся вихревых цепочек. Полная аналогия, которую мы установим нашим обобщенным исследованием, даст нам право рассматривать асимметричные дорожки при условии устойчивости, отличном от условия (3), как такие, которые, так же как и дорожки Кармана, «наименее неустойчивы». Следовательно, можно ожидать, что асимметричные дорожки, несмотря на непродолжительное косое протекание, переходят без разрушения в дорожки с шахматным расположением вихрей.

И теперь мы будем исходить из альтернативно смещенной вихревой дорожки с асимметричным расположением вихрей, чье движение управляется системой дифференциальных уравнений ([3])

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{z}'_1}{dt} &= \frac{\Gamma}{4li}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2l}(z'_1-z'_2)-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2l}(z'_1-z''_1)-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2l}(z'_1-z''_2)\right\},\\
\frac{d\overline{z}'_2}{dt} &= \frac{\Gamma}{4li}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2l}(z'_2-z'_1)-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2l}(z'_2-z''_1)-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2l}(z'_2-z''_2)\right\},\\
\frac{d\overline{z}''_1}{dt} &= \frac{\Gamma}{4li}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2l}(z''_1-z'_1)-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2l}(z''_1-z'_2)-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2l}(z''_1-z''_2)\right\},\\
\frac{d\overline{z}''_2}{dt} &= \frac{\Gamma}{4li}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2l}(z''_2-z'_1)-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2l}(z''_2-z'_2)-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2l}(z''_2-z''_1)\right\},
\end{aligned} \tag{4}$$

причем несмещенные вихревые цепочки движутся со скоростью (2). Асимметричное начальное расположение вихрей фиксируем формулами

$$z'_{10}=d+ih/2,\ z''_{10}=-d-ih/2;\quad z'_{20}=l+d+ih/2,\ z''_{20}=l-d-ih/2. \tag{5}$$

Обозначим для краткости $\frac{\Gamma\pi}{8l^2}t=\tau$ и введем, в соответствии с этим, для k-го аффикса альтернативно смещенных вихрей выражение

$$z_k=\frac{\Gamma}{2l}(\overline{U}_A-i\overline{V}_A)\,t+z_{k0}+\frac{2l}{\pi}\,\zeta, \tag{6}$$

в котором $\overline{U}_A$ и $\overline{V}_A$ являются, с точностью до известного множителя, компонентами (2), а ζ является аффиксом смещения k-го вихря; система (4) принимает вид

$$
\begin{aligned}
\frac{d\bar{\zeta}_1'}{d\tau} &= i\left\{\operatorname{tg}(\zeta_1'-\zeta_1'')+\operatorname{cotg}\left(\zeta_1'-\zeta_2'+\lambda\pi+\varkappa\frac{\pi}{2}\right)+\right.\\
&\left.+\operatorname{cotg}\left(\zeta_1'-\zeta_2''+\lambda\pi+\varkappa\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-2(\bar{U}_A-i\bar{V}_A)\right\},\\
\frac{d\bar{\zeta}_2'}{d\tau} &= i\left\{\operatorname{tg}(\zeta_2''-\zeta_2')+\operatorname{cotg}\left(\zeta_1'-\zeta_2'+\lambda\pi+\varkappa\frac{\pi}{2}\right)+\right.\\
&\left.+\operatorname{cotg}\left(\zeta_1''-\zeta_2'+\lambda\pi+\varkappa\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-2(\bar{U}_A-i\bar{V}_A)\right\},\\
\frac{d\bar{\zeta}_1''}{d\tau} &= i\left\{\operatorname{tg}(\zeta_1''-\zeta_1')+\operatorname{cotg}\left(\zeta_1''-\zeta_2''+\lambda\pi+\varkappa\frac{\pi}{2}\right)+\right.\\
&\left.+\operatorname{cotg}\left(\zeta_1''-\zeta_2'+\lambda\pi+\varkappa\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-2(\bar{U}_A-i\bar{V}_A)\right\},\\
\frac{d\bar{\zeta}_2''}{d\tau} &= i\left\{\operatorname{tg}(\zeta_2'-\zeta_2'')+\operatorname{cotg}\left(\zeta_1''-\zeta_2''+\lambda\pi+\varkappa\frac{\pi}{2}\right)+\right.\\
&\left.+\operatorname{cotg}\left(\zeta_1'-\zeta_2''+\lambda\pi+\varkappa\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-2(\bar{U}_A-i\bar{V}_A)\right\}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Интеграл этой системы $\zeta_1'-\zeta_2'+\zeta_1''-\zeta_2''=C$ и требование однозначности вихревой основной формы, вследствие чего $C=0$, приводят нас к соотношению $\zeta_2'-\zeta_1'=\zeta_1''-\zeta_2''$, или $\zeta_2''-\zeta_1'=\zeta_1''-\zeta_2'$.

Чтобы получить наиболее общее решение системы (7), мы вычтем почленно уравнения, относящиеся к двум рядам, и обозначим $2(\zeta_2'-\zeta_1')=\alpha=2(\zeta_1''-\zeta_2'')$, $2(\zeta_2''-\zeta_1')=\beta=2(\zeta_1''-\zeta_2')$. (7) превратится в

$$
\begin{aligned}
\frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} &= 4i\sin\beta\left(\frac{1}{\cos\alpha+\cos\beta}-\frac{1}{\cos\beta+a}\right),\\
\frac{d\bar{\beta}}{d\tau} &= 4i\sin\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha+\cos\beta}-\frac{1}{\cos\beta-a}\right),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где мы обозначили $a=\cos(\lambda\pi+i\varkappa\pi)$. Для $\lambda={}^1/_2$ непосредственно видно, что система обращается в систему Кочина [3] для устойчивой, по формуле (3), шахматной дорожки Кармана. Чтобы исследовать систему (8), сохраним в ней только члены, линейные по отношению к α и β. Таким образом система (8) переходит в более простую:

$$
\frac{d\bar{\alpha}}{d\tau}=-2i\,\frac{1-a}{1+a}\,\beta,\quad \frac{d\bar{\beta}}{d\tau}=-2i\,\frac{1+a}{1-a}\,\alpha, \tag{9}
$$

к которой присоединяем сопряженную с ней систему

$$
\frac{d\alpha}{d\tau}=2i\,\frac{1-\bar{a}}{1+\bar{a}}\,\bar{\beta},\quad \frac{d\beta}{d\tau}=2i\,\frac{1+\bar{a}}{1-\bar{a}}\,\bar{\alpha}. \tag{10}
$$

Система (9), (10) удовлетворяется частными решениями: $\alpha=Me^{\omega t}$, $\bar{\alpha}=Ne^{\omega t}$, $\beta=Re^{\omega t}$, $\bar{\beta}=Se^{\omega t}$, которые приводят нас к характеристичной системе алгебраических уравнений

$$
M\omega-\bar{L}S=0,\quad R\omega-\bar{K}N=0,\quad N\omega+LR=0,\quad S\omega+KM=0, \tag{11}
$$

однородных по отношению M, N, R, S. Здесь мы обозначили

$$
K=-2\,\frac{1+a}{1-a}\,i,\quad \bar{K}=2\,\frac{1+\bar{a}}{1-\bar{a}}\,i;\quad L=-2\,\frac{1-a}{1+a}\,i,\quad \bar{L}=2\,\frac{1-\bar{a}}{1+\bar{a}}\,i. \tag{12}
$$

Исключение M, N, R, S из (11) приводит нас к уравнению

$$
\omega^4+(L\bar{K}+\bar{L}K)\,\omega^2+L\bar{L}K\bar{K}=0. \tag{13}
$$

Корни соответствующего ему квадратного уравнения при $\omega^2 = \varepsilon$ даются выражением

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 4\,\frac{(1+a)\,(1-\bar{a})}{(1-a)\,(1+\bar{a})} = 4\,\frac{1-|a|-2i\sin\lambda\pi\cdot\operatorname{sh}\varkappa\pi}{1-|a|+2i\sin\lambda\pi\cdot\operatorname{sh}\varkappa\pi}, \\ \varepsilon_2 &= 4\,\frac{(1-a)\,(1+\bar{a})}{(1+a)\,(1-\bar{a})} = 4\,\frac{1-|a|+2i\sin\lambda\pi\cdot\operatorname{sh}\varkappa\pi}{1-|a|-2i\sin\lambda\pi\cdot\operatorname{sh}\varkappa\pi}, \end{aligned} \tag{14}$$

так как $a-\bar{a} = -2i\sin\lambda\pi\cdot\operatorname{sh}\varkappa\pi = -Qi$. Для корней ω, обозначив $R^2 = (1-|a|)^2 + Q^2$, получаем

$$\omega_{1,2,3,4} = \pm\frac{2}{R}\,(1-|a|\pm Qi). \tag{15}$$

Если $1-|a| \neq 0$, то два из корней (13) будут иметь положительную действительную часть, вследствие чего решение $\alpha = 0$, $\beta = 0$ будет неустойчивым решением системы (9), (10). Если же $|a| = 1$, или, что то же,

$$|\cos(\lambda\pi + i\varkappa\pi)| = 1, \tag{16}$$

то мы снова находим условие

$$\operatorname{sh}(\varkappa\pi) = \sin(\lambda\pi), \tag{17}$$

каковое является необходимым для устойчивости асимметричных вихревых дорожек и при конечных смещениях всех вихрей.

Но теперь уравнение (13) имеет два чисто мнимых двойных корня, так как из R и (16) следует $R = Q$, следовательно, (15) превращается в $\omega = \pm 2i$. Таким образом, и для асимметричных дорожек мы сталкиваемся со случаем, когда первое приближение является недостаточным, чтобы утверждать, что решение $\alpha = 0$, $\beta = 0$ устойчиво. Однако полученное необходимое условие устойчивости (17), из которого для $\lambda = 1/2$ вытекает условие Кармана (3), дает нам право утверждать вместе с Н. Е. Кочиным ([4]), что «до некоторой степени и (17) сохраняет свое значение, так как оно характеризует те расположения вихрей, которые обладают наименьшей неустойчивостью по сравнению со всеми другими расположениями вихрей».

Что касается дальнейших исследований, имеющих своей целью установить по методу Ляпунова — Кочина нестабильность также и асимметричных дорожек, мы только заметим, что и для этих обобщенных дорожек получается функция, вполне аналогичная той, которую использует Н. Е. Кочин ([3]),

$$F(\alpha, \beta) = 4\ln\left|\frac{(\cos\alpha - a)\,(\cos\beta + a)}{\cos\alpha + \cos\beta}\right|, \tag{18}$$

где $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, а комплексная постоянная величина определяется (8) и условием (17). Система дифференциальных уравнений (8) и теперь заменяется системой

$$\frac{d\alpha_1}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial\beta_2}, \quad \frac{d\alpha_2}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial\beta_1}; \quad \frac{d\beta_1}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial\alpha_2}, \quad \frac{d\beta_2}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial\alpha_1} \tag{19}$$

с первым интегралом $F = \text{const}$.

Остальные рассмотрения вполне совпадают с исследованиями Н. Е. Кочина.

Математический институт
София, Болгария

Поступило
10 XI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Bl. Dolaptschiew, ZAMM, **17**, 313 (1937). [2] Бл. Долапчиев, Списание на бълг. Акад. на науките, **57**, 149 (1938). [3] Н. Е. Кочин, ДАН, **24**, № 1 (1939). [4] Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, **1**, гл. V, § 21, 1948, стр. 222.