Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 1

ГИДРОМЕХАНИКА

С. В. ВАЛЛАНДЕР

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 18 I 1951)

В настоящей заметке мы кратко изложим вывод дифференциальных уравнений движения вязкого газа. Из вывода уравнений будет видно, что используемые в настоящее время уравнения движения выведены из недостаточно полных физических представлений и должны быть заменены уравнениями, полученными ниже.

Предположим газ совершенным. Кроме того, предположим, что отношение средней длины свободного пробега молекул к характерному размеру явления есть величина малая по сравнению с единицей. Наконец, предположим, что внутренняя энергия E единицы массы газа дается формулой $E = c_v T$, где c_v — коэффициент теплоемкости при постоянном объеме, который будем считать выраженным в механических единицах, и T — абсолютная температура. Определим макроскопическую скорость $\mathbf{v}$ движения газа как скорость центра инерции бесконечно малого объема.

Тогда, вообще говоря, через подвижные площадки, движущиеся со скоростью $\mathbf{v}$, будут иметь место потоки массы (самодиффузия), энергии (теплопроводность) и количества движения (давление, вязкость). Потоки количества движения могут быть трактованы как напряжения.

Обозначим через Q_x, Q_y и Q_z потоки массы через площадки, перпендикулярные осям декартовых координат и движущиеся вместе с газом со скоростью $\mathbf{v}$. Обозначим через t_x, t_y и t_z потоки энергии через те же площадки.

При сделанных предположениях будем иметь формулы:

$$Q_x = D_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + D_2 \frac{\partial T}{\partial x}, \quad Q_y = D_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + D_2 \frac{\partial T}{\partial y}, \quad Q_z = D_1 \frac{\partial \rho}{\partial z} + D_2 \frac{\partial T}{\partial z},$$
$$t_x = k_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + k_2 \frac{\partial T}{\partial x}, \quad t_y = k_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + k_2 \frac{\partial T}{\partial y}, \quad t_z = k_1 \frac{\partial \rho}{\partial z} + k_2 \frac{\partial T}{\partial z} \tag{1}$$

где ρ — плотность, D_1 — коэффициент плотностной самодиффузии, D_2 — коэффициент термо-самодиффузии, k_1 — коэффициент плотностной теплопроводности, k_2 — коэффициент температурной теплопроводности.

Обозначим через τ_{xx}, $\tau_{xy}, \ldots$ компоненты тензора потоков количеств движения через те же подвижные площадки. При сделанных предположениях для них будем иметь формулы:

$$\tau_{xx} = -R\rho T + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right), \tag{2}$$

где R — газовая постоянная, μ — коэффициент вязкости, λ — коэффициент второй вязкости.

Для совершенного газа из теории размерностей легко получить и следующие формулы

$$D_1 = \frac{\mu}{\rho}\alpha_1, \quad D_2 = \frac{\mu}{T}\alpha_2, \quad k_1 = \frac{\mu c_v T}{\rho}\beta_1, \quad k_2 = \mu c_v \beta_2, \quad \lambda = a\mu, \tag{3}$$

где α_1, α_2, β_1, β_2 a — числовые константы порядка единицы, зависящие от сорта газа. В частном случае одноатомного газа теоретические и экспериментальные данные приводят к значениям: $\alpha_1 = 1{,}30$, $\alpha_2 = 1{,}30$, $\beta_1 = 1{,}30$, $\beta_2 = 3{,}81$ *, $a = {}^2/_3$.

Перейдем к выводу уравнений движения. Рассмотрим некоторый гидродинамический элемент A и неподвижный объем P. Определим величину Φ формулой

$$\Phi = \iiint\limits_{(P)} A\, dP \tag{4}$$

и предположим, что величина Φ меняется только за счет независимого действия следующих двух факторов:

1) внутри объема P имеет место возникновение величины Φ с объемной скоростью B, и за счет действия этого фактора в объеме dP в течение времени dt величина Φ испытывает изменение $\Delta_1\Phi = B\, dP\, dt$;

2) через поверхность S (с нормалью $\mathbf{n}$) объема P имеет место ток величины Φ с поверхностной плотностью G_n, и за счет действия этого фактора на площадке dS в течение времени dt величина Φ испытывает изменение $\Delta_2\Phi = G_n\, dS\, dt$.

Тогда, подсчитывая двумя различными способами изменение $d\Phi$ величины Φ за время dt, получим уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial t} = B + \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}. \tag{5}$$

Выделим из величины G_n конвективный поток и положим

$$G_n = -Av_n + C_n. \tag{6}$$

Тогда величина C_n будет потоком через площадку, движущуюся вместе с газом. Уравнение (4) преобразуется при этом к виду

$$\frac{dA}{dt} + A \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}. \tag{7}$$

Используем теперь (6) для записи закона сохранения массы, закона количеств движения и закона сохранения энергии.

Для записи закона сохранения масс (в предположении отсутствия источников) положим

$$A = \rho, \quad B = 0, \quad C_x = Q_x, \quad C_y = Q_y, \quad C_z = Q_z. \tag{8}$$

* Опыты по измерению коэффициента теплопроводности дают не величину β_2, а величину $\beta_2 - \beta_1$. Поэтому наше значение β_2 для одноатомных газов не противоречит опытным данным.

Для записи закона количеств движения положим:

$$A = \rho \mathbf{v}, \quad B = \rho \mathbf{F}, \quad c_x = \overline{\tau}_x, \quad c_y = \overline{\tau}_y, \quad c_z = \overline{\tau}_z, \tag{9}$$

где $\mathbf{F}$ — массовая сила.

Для записи закона сохранения энергии (предполагая отсутствие выделения и поглощения химической энергии внутри P) положим:

$$A = \rho \frac{v^2}{2} + \rho E, \quad B = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \tag{10}$$

$$c_x = \overline{\tau}_x \cdot \mathbf{v} + t_x, \quad c_y = \overline{\tau}_y \cdot \mathbf{v} + t_y, \quad c_z = \overline{\tau}_z \cdot \mathbf{v} + t_z .$$

Тогда после простых преобразований получим уравнения

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z},$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \right) = \rho \mathbf{F} + \frac{\partial \overline{\tau}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau}_y}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau}_z}{\partial z}, \tag{11}$$

$$\rho \frac{dE}{dt} + \left(E - \frac{v^2}{2} \right) \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \right) =$$
$$= \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + \frac{\partial t_z}{\partial z} + \overline{\tau}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \overline{\tau}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \overline{\tau}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} .$$

Уравнения движения получим, присоединив к (10) (1), (2) и формулу $E = c_v T$. Новые члены в уравнениях движения будут порядка вязких членов, если все гидродинамические элементы испытывают изменения порядка их самих на расстояниях порядка одной и той же длины L.

В качестве краевых условий на поверхности S неподвижного твердого тела могут быть выставлены условия:

$$(\rho v_n)_S = \left(D_1 \frac{\partial \rho}{\partial n} + D_2 \frac{\partial T}{\partial n} \right)_S,$$

$$(T)_S = T_S, \tag{12}$$

$$(v_{\tau 1})_S = (v_{\tau 2})_S = 0,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_S = (\rho F_n)_S,$$

где $v_{\tau 1}$ и $v_{\tau 2}$ — проекции скорости на два направления, касательных к S, и $P = R\rho T$ — давление.

Первое условие означает отсутствие тока массы через поверхность S. Второе условие означает равенство температуры газа и твердого тела на S. Третье условие означает обращение в нуль касательной составляющей скорости на S. Четвертое условие означает, что в тонком неподвижном слое газа, примыкающем к S, в направлении нормали устанавливается статическое распределение давлений.

Научно-исследовательский институт
математики и механики
Ленинградского государственного
университета им. А. А. Жданова

Поступило
15 I 1951