Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 1

*МАТЕМАТИКА*

М. Р. ШУРА-БУРА

# ВЕРОЯТНОСТНАЯ ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ В РЕШЕНИИ КОНЕЧНОРАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ, АППРОКСИМИРУЮЩЕГО ЗАДАЧУ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА, НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТКАХ

*(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 9 III 1951)*

При численном решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом квадратных сеток ставится задача нахождения функции, значение которой в каждом внутреннем узле сетки равно среднему арифметическому ее значений в четырех соседних узлах. Этим свойством обладает значение электрического потенциала, если между каждой парой соседних узлов введена активная проводимость одной и той же величины. На этом основано применение электрических сеток для решения уравнения Лапласа. Однако практически проводимости не могут быть изготовлены совершенно одинаковыми. Отклонения значений проводимостей от заданной величины можно рассматривать как некоторые независимые случайные величины. Средние этих случайных величин мы будем считать равными нулю, а дисперсию — равной некоторой постоянной. Отклонения значений проводимостей вызывают погрешности в решении рассматриваемой задачи. При этом отклонение значения потенциала в данном узле от значения, которое, при тех же граничных условиях, принимает потенциал в данном узле в отсутствие отклонений проводимостей, является случайной величиной.

Оценка дисперсии этой случайной величины — цель настоящей работы.

Вопросам точности решений задачи Дирихле на электрических сетках была посвящена работа М. Л. Быховского ([1]), содержащая и оценку дисперсии, о которой идет речь здесь. Содержащаяся в работе М. Л. Быховского оценка выведена в неправильном предположении об асимптотическом поведении некоторого выражения. Следует, однако, отметить, что для имеющихся в настоящее время сеток, в которых число узлов колеблется в сравнительно небольших пределах, приведенная здесь оценка практически мало отличается от оценки М. Л. Быховского.

Пусть узлами сетки будут точки $(i, j)$, $0 \leqslant i \leqslant m$, $0 \leqslant j \leqslant n$. Рассмотрим оператор над функциями $f(i, j)$

$$\tilde{\Delta} f(i, j) = \sum_{s=0}^{3} f\left(i + \cos\frac{\pi}{2}s,\ j + \sin\frac{\pi}{2}s\right) - 4f(i, j),$$

и обозначим через $\mu[1+d_s(i, j)]$ значение проводимости между узлами $(i, j)$ и $\left(i+\cos\frac{\pi}{2}s,\ j+\sin\frac{\pi}{2}s\right)$.

Тогда разность $V(i, j)=\overline{U}(i, j)-U(i, j)$, где $\overline{U}(i, j)$ — значение потенциала в узле $(i, j)$ данной сетки, а $U(i, j)$ — значение потенциала в узле $(i, j)$ сетки, для которой все $d_s(i, j)$ равны нулю, при тех же граничных условиях, удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\Delta}V(i, j)=\sum_{s=0}^{3} d_s(i, j)\left[\overline{U}(i, j)-\overline{U}\left(i+\cos\frac{\pi}{2}s,\ j+\sin\frac{\pi}{2}s\right)\right]=\psi(i, j) \quad (1)$$

при нулевых граничных условиях.

Рассмотрим ([2]) систему функций

$$\varphi_{kl}(i, j)=\sin\frac{\pi ik}{m}\sin\frac{\pi jl}{n}, \quad k=1,\ldots, m-1, \quad l=1,\ldots, n-1,$$

являющуюся полной ортогональной системой собственных функций оператора $\tilde{\Delta}$ при нулевых условиях на границе прямоугольника $0\leqslant i\leqslant m$, $0\leqslant j\leqslant n$:

$$\tilde{\Delta}\varphi_{kl}(i, j)=\lambda_{kl}\varphi_{kl}(i, j),$$

где $\lambda_{kl}=-4\left(\sin^2\frac{\pi k}{2m}+\sin^2\frac{\pi l}{2n}\right)$.

Из соотношения (1), в силу самосопряженности оператора $\tilde{\Delta}$ в рассматриваемых условиях, получаем:

$$(\tilde{\Delta}V, \varphi_{kl})=(V, \tilde{\Delta}\varphi_{kl})=\lambda_{kl}(V, \varphi_{kl})=(\psi, \varphi_{kl}),$$

где $(f, g)=\sum_{ij} f(i, j)\,g(i, j)$ — скалярное произведение функций $f$ и $g$. Отсюда вытекает, в силу ортогональности и полноты системы $\{\varphi_{kl}\}$, что

$$V(i, j)=-\frac{1}{mn}\sum_{p=1}^{m-1}\sum_{q=1}^{n-1}\psi(p, q)\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\sin\frac{\pi pk}{m}\sin\frac{\pi ql}{n}\sin\frac{\pi ik}{m}\sin\frac{\pi jl}{n}}{\sin^2\frac{\pi k}{2m}+\sin^2\frac{\pi l}{2n}}. \quad (2)$$

Случайные величины $d_s(p, q)$ удовлетворяют соотношениям $d_0(p, q)=d_2(p+1, q)$ и $d_1(p, q)=d_3(p, q+1)$, а в остальном независимы (см. выше). Величины разностей $\overline{U}(p, q)-\overline{U}\left(p+\cos\frac{\pi}{2}s,\ q+\sin\frac{\pi}{2}s\right)$ при малых $d_s(p, q)$ с точностью до малых высшего порядка не зависят от $d_s(p, q)$ и равны, соответственно, разностям $U(p, q)-U\left(p+\cos\frac{\pi}{2}s,\ q+\sin\frac{\pi}{2}s\right)$.

Учитывая выражение для функции $\psi(i, j)$ и приведенные выше соотношения, связывающие различные $d_s(p, q)$, перепишем соотношение (2) в следующем виде:

$$V(i,\ j)=\frac{1}{mn}\left\{\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=1}^{n-1} d_0(p,\ q)\,[\overline{U}(p+1,\ q)-\overline{U}(p,\ q)]\times\right.$$

$$\times\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\sin\frac{\pi ik}{m}\sin\frac{\pi jl}{n}\sin\frac{\pi ql}{n}\sin\frac{\pi k}{2m}\cos\frac{\pi(2p+1)k}{2m}}{\sin^2\frac{\pi k}{2m}+\sin^2\frac{\pi l}{2n}}+$$

$$+\sum_{p=1}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1} d_1(p,\ q)\,[\overline{U}(p,\ q+1)-\overline{U}(p,\ q)]\times$$

$$\left.\times\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\sin\frac{\pi ik}{m}\sin\frac{\pi jl}{n}\sin\frac{\pi pk}{m}\sin\frac{\pi l}{2n}\cos\frac{\pi(2q+1)l}{2n}}{\sin^2\frac{\pi k}{2m}+\sin^2\frac{\pi l}{2n}}\right\}. \qquad (3)$$

В силу отмеченного выше свойства разностей, стоящих в квадратных скобках в правой части соотношения (3), последнее можно рассматривать как представление случайной величины $V(i,\ j)$ в виде суммы независимых случайных величин.

Пусть дисперсия случайной величины $d_s(p,\ q)$ равна $\sigma^2$ и допустим, что

$$\left|\overline{U}\left(p+\cos\frac{\pi}{2}s,\ q+\sin\frac{\pi}{2}s\right)-\overline{U}(p,\ q)\right|\leqslant\frac{M}{n'},$$

где $n'=\min(m,\ n)$.

Тогда дисперсия величины $V(i,\ j)$ не превосходит величины $\frac{1}{n'^2}M^2\sigma^2$, умноженной на двойную сумму по $p,\ q$ квадратов двойных сумм по $k,\ l$ в правой части соотношения (3).

Проводя все необходимые выкладки, получаем:

$$D^2[V(i,\ j)]\leqslant\frac{M^2\sigma^2}{n'^2mn}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\sin^2\frac{\pi ik}{m}\sin^2\frac{\pi jl}{n}}{\sin^2\frac{\pi k}{2m}+\sin\frac{\pi l}{2n}}. \qquad (4)$$

Оценивая стоящую в (4) справа сумму сверху, получаем:

$$D^2[V(i,\ j)]\leqslant\frac{\sigma^2M^2\ln(m'2\sqrt{2})}{n'^2}, \qquad (5)$$

где $m'=\max(m,\ n)$.

В [1] в аналогичной оценке отсутствует справа множитель $\ln(m'2\sqrt{2})$. Однако можно показать, оценивая снизу $D^2[V(s,\ s)]$ для $m=n=2s$, что этот множитель нельзя заменить постоянной.

Выражение

$$\frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\sin^2\frac{\pi ik}{m}\sin^2\frac{\pi jl}{n}}{\sin^2\frac{\pi k}{2m}+\sin^2\frac{\pi l}{2n}}$$

представляет собой значение функции

$$G_{[m,\,n]}(i,\ j;\ p,\ q)=\frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\sin\frac{\pi ik}{m}\sin\frac{\pi jl}{n}\sin\frac{\pi pk}{m}\sin\frac{\pi ql}{n}}{\sin^2\frac{\pi k}{2m}+\sin^2\frac{\pi l}{2n}},$$

являющейся «конечноразностной функцией Грина» для прямоугольной сетки $0 \leqslant i \leqslant m$, $0 \leqslant j \leqslant n$ при $p = i$ и $q = j$.

Таким образом, соотношение (4) можно переписать в виде

$$D^2 [V(i, j)] \leqslant \frac{M^2 \sigma^2}{n'^2} G_{[m, n]}(i, j; i, j). \qquad (4')$$

В этом виде формула остается справедливой для произвольной (не обязательно прямоугольной) электрической сетки. Аналогичная формула имеет место и для сеток, моделирующих конечноразностную аппроксимацию задачи Дирихле для уравнения Лапласа при любом числе независимых переменных.

Как сообщил мне А. Н. Колмогоров, им было получено асимптотическое выражение

$$D^2 [V(x, y)] \sim \frac{C \ln n}{n^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right], \qquad (6)$$

где $C$ — некоторая константа, а $u$ — точное решение Дирихле, справедливое для области любой формы при измельчении сетки.

Используя те же выкладки, которые приводят к соотношению (4'), можно получить асимптотическое выражение

$$D^2 [V(x, y)] \sim \frac{1}{n^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 K_{1/n} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 L_{1/n} \right], \qquad (6')$$

где $K_{1/n}$ и $L_{1/n}$ — величины, выражающиеся через значения функции Грина для сетки, с шагом в $1/n$ аппроксимирующей данную область. Асимптотическое поведение величин $K_{1/n}$ и $L_{1/n}$ зависит только от $n$. Каждая из этих величин асимптотически равна $\frac{1}{4\pi} \ln n$. Подставляя последнее выражение в соотношение (6'), приходим к выводу, что постоянная в асимптотическом равенстве Колмогорова (6) оказывается равной $1/4\pi$.

Поступило
9 III 1951

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Л. Быховский, Изв. АН СССР, ОТН, № 4 (1950). [2] Л. А. Люстерник, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, **20** (1947).