Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ТИМАН

УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ДЖЕКСОНА О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 19 II 1951)

1. Известная теорема Джексона из теории наилучших приближений утверждает, что если функция $f(x)$, заданная на $[-1, 1]$, имеет там r-ю ($r \geqslant 0$) непрерывную производную, то существует константа C, не зависящая от x и n, такая, что для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ найдется обыкновенный многочлен

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{1,1}$$

степени не выше, чем n, удовлетворяющий неравенству

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{C}{n^r}\,\omega_r\left(\frac{1}{n}\right), \tag{1,2}$$

для каждого $x \in [-1, 1]$, где $\omega_r(h)$ есть модуль непрерывности r-й производной, т. е.

$$\omega_r(h) = \sup_{|x_1 - x_2| \leqslant h} |f^{(r)}(x_1) - f^{(r)}(x_2)|, \quad x_1, x_2 \in [-1, 1]. \tag{1,3}$$

В этой работе мы устанавливаем следующее предложение, представляющее собой усиление указанной теоремы Джексона.

Теорема. *Если функция $f(x)$, заданная на $[-1, 1]$, имеет там r-ю ($r \geqslant 0$) непрерывную производную, то существует константа C, не зависящая от x и n, такая, что для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ найдется обыкновенный многочлен $P_n(x)$ степени не выше, чем n, удовлетворяющий для каждого $x \in [-1, 1]$ неравенству*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{C}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{|x|}{n}\right)^r \left[\omega_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right) + \omega_r\left(\frac{|x|}{n^2}\right)\right]. \tag{1,4}$$

Частные случаи этой теоремы получены нами в работе [2], где уже была отмечена связь, которую имеет обнаруженное здесь явление с некоторыми известными результатами С. Н. Бернштейна [1].

2. Доказательство. Рассмотрим последовательность четных тригонометрических полиномов

$$T_{(r+2)(n-1)}(u) = \left(\frac{\sin n\dfrac{u}{2}}{n \sin\dfrac{u}{2}}\right)^{2r+4} \tag{2,1}$$

порядка $(r+2)(n-1)$. Справедлива следующая лемма, которую мы приводим без доказательства.

Лемма. *Для каждого целого числа p, удовлетворяющего неравенству $0 \leqslant p \leqslant r$, и для любой функции $\omega(t)$, являющейся модулем непрерывности, при $n \to \infty$ имеет место соотношение*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos y|^p \omega(|\cos t - \cos y|)\, T_{(r+2)(n-1)}(t \pm y)\, dt =$$

$$= \frac{1}{n^{p+1}} O\left\{\left(|\sin y)| + \frac{|\cos y|}{n}\right)^p \left[\omega\left(\frac{|\sin y|}{n}\right) + \omega\left(\frac{|\cos y|}{n^2}\right)\right]\right\} \quad (2,2)$$

равномерно относительно y.

Предположим, что теорема уже доказана для всех $0 \leqslant k \leqslant r-1$. Тогда существует константа C_r такая, что для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ найдется r многочленов $Q_n(f^{(\nu)}; x)$ $(1 \leqslant \nu \leqslant r)$ степени n, удовлетворяющих неравенствам

$$|f^{(\nu)}(x) - Q_n(f^{(\nu)}; x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_r}{n^{r-\nu}}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{|x|}{n}\right)^{r-\nu}\left[\omega_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right) + \omega_r\left(\frac{|x|}{n^2}\right)\right], \quad (2,3)$$

$$\nu = 1, 2, 3, \ldots, r.$$

Рассмотрим для каждого $1 \leqslant k \leqslant r$ интеграл

$$V_k(x) = \frac{1}{2\pi\gamma_n^{(r)}} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - \cos y)^k \{T_{(r+2)(n-1)}(t+y) + T_{(r+2)(n-1)}(t-y)\}\, dt, \quad (2,4)$$

где

$$y = \arc\cos x, \qquad \gamma_n^{(r)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_{(r+2)(n-1)}(u)\, du. \quad (2,5)$$

Легко видеть, что $V_k(x)$ представляет собой обыкновенный многочлен степени k. Кроме того, для любой рассматриваемой нами функции $f(x)$ положим

$$P_{(r+2)(n-1)}(f; x) = \frac{1}{2\pi\gamma_n^{(r)}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t)\{T_{(r+2)(n-1)}(t+y) + T_{(r+2)(n-1)}(t-y)\}\, dt. \quad (2,6)$$

Очевидно также, что $P_{(r+2)(n-1)}(f; x)$ есть обыкновенный многочлен степени $(r+2)(n-1)$. Из многочленов $P_{(r+2)(n-1)}(f; x)$ и $V_k(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ образуем многочлен

$$P^*_{(r+2)(n-1)}(f; x) = -\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} Q_n(f^{(k)}; x)\, V_k(x) + P_{(r+2)(n-1)}(f; x) \quad (2,7)$$

степени $(r+2)(n-1)$ и покажем, что он удовлетворяет неравенству (1,4). В самом деле, легко видеть, что согласно (2,4) и (2,7)

$$|f(x) - P^*_{(r+2)(n-1)}(f; x)| = \frac{1}{2\pi\gamma_n^{(r)}}\left|\int_{-\pi}^{\pi}[f(\cos t) - f(\cos y)]\{T_{(r+2)(n-1)}(t+y) + \right.$$

$$+ T_{(r+2)(n-1)}(t-y)\}\, dt - \sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k!} Q_n(f^{(k)}; x)\int_{-\pi}^{\pi}(\cos t - \cos y)^k \times$$

$$\left. \times \{T_{(r+2)(n-1)}(t+y) + T_{(r+2)(n-1)}(t-y)\}\, dt\right|. \quad (2,8)$$

Далее, благодаря тому, что $f(x)$ имеет r-ю $(r \geqslant 0)$ непрерывную производную с модулем непрерывности $\omega_r(h)$, для любых двух точек $\tau, x \in [-1, 1]$ справедливо соотношение

$$f(\tau) - f(x) = f'(x)(\tau - x) + \frac{1}{2!} f''(x)(\tau - x)^2 + \cdots + \frac{1}{r!} f^{(r)}(x)(\tau - x)^r + \\ + O[(\tau - x)^r \omega_r(|\tau - x|)].$$

В силу этого мы из (2,8) получим

$$|f(x) - P^*_{(r+2)(n-1)}(f; x)| = \frac{1}{2\pi\gamma_n^{(r)}} \left| \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} [f^{(k)}(x) - Q_n(f^{(k)}; x)] \times \right.$$
$$\times \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - \cos y)^k \{T_{(r+2)(n-1)}(t + y) + T_{(r+2)(n-1)}(t - y)\} dt +$$
$$+ O\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos y|^r \omega_r(|\cos t - \cos y|) \{T_{(r+2)(n-1)}(t + y) + \right.$$
$$\left.\left. + T_{(r+2)(n-1)}(t - y)\} dt \right) \right|,$$

откуда следует, что

$$|f(x) - P^*_{(r+2)(n-1)}(f; x)| \leqslant \frac{1}{2\pi\gamma_n^{(r)}} \sum_{k=1}^{r} |f^{(k)}(x) - Q_n(f^{(k)}; x)| \int_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos y|^k \times$$
$$\times \{T_{(r+2)(n-1)}(t + y) + T_{(r+2)(n-1)}(t - y)\} dt + O\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos y|^r \omega_r \times \right.$$
$$\left. \times (|\cos t - \cos y|) [T_{(r+2)(n-1)}(t + y) + T_{(r+2)(n-1)}(t - y)] dt \right\}. \qquad (2,9)$$

В силу неравенств (2,3) и леммы, из (2,9), таким образом, вытекает, что

$$|f(x) - P^*_{(r+2)(n-1)}(f; x)| = \frac{1}{n^{r+1}\gamma_n^{(r)}} O\left\{ \left(\sqrt{1 - x^2} + \frac{|x|}{n} \right)^r \times \right.$$
$$\left. \times \left[\omega_r\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{n} \right) + \omega_r\left(\frac{|x|}{n^2} \right) \right] \right\}. \qquad (2,10)$$

Если еще заметить, что

$$\gamma_n^{(r)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_{(r+2)(n-1)}(u)\, du = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nu}{n \sin u} \right)^{2r+4} du > \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nu}{nu} \right)^{2r+4} du >$$
$$> \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2n} \left(\frac{\sin nu}{nu} \right)^{2r+4} du = \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^{2r+4} du = \frac{C^*}{n}, \qquad (2,11)$$

то из (2,10) получим, при некотором $C > 0$, неравенство

$$|f(x) - P^*_{(r+2)(n-1)}(f; x)| \leqslant \frac{C}{n^r} \left\{ \sqrt{1 - x^2} + \frac{|x|}{n} \right\}^r \times$$
$$\times \left[\omega_r\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{n} \right) + \omega_r\left(\frac{|x|}{n^2} \right) \right],$$

равномерно по всем $x \in [-1, 1]$ и всем функциям $f(x)$, имеющим на этом сегменте r-ю $(r \geqslant 0)$ производную с данным модулем непрерывности $\omega_r(h)$. Этого достаточно для справедливости теоремы при $k=r$.

Остается, таким образом, доказать теорему при $r=0$. Для этой цели мы рассматриваем определенные нами выше многочлены $P_{2n-2}(f; x)$ $(r=0)$ и оцениваем разность $|f(x)-P_{2n-2}(f; x)|$.

Очевидно, что

$$|f(x)-P_{2n-2}(f; x)| = \frac{1}{2\pi\gamma_n^{(0)}}\left|\int_{-\pi}^{\pi}[f(\cos t)-f(\cos y)]\{T_{2n-2}(t+y)+\right.$$

$$\left.+T_{2n-2}(t-y)\}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi\gamma_n^{(0)}}\int_{-\pi}^{\pi}\omega(|\cos t-\cos y|)\{T_{2n-2}(t+y)+$$

$$+T_{2n-2}(t-y)\}\,dt. \qquad (2,12)$$

Если теперь учесть (2,11) и воспользоваться леммой при $p=0$, то из (2,12) получим соотношение

$$|f(x)-P_{2n-2}(f; x)| = O\left[\omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)+\omega\left(\frac{|x|}{n^2}\right)\right],$$

равномерно по всем $x\in[-1, 1]$ и всем функциям $f(x)$, имеющим на этом сегменте заданный модуль непрерывности $\omega(h)$. Этого достаточно для доказательства теоремы при $r=0$.

Следовательно, теорема доказана для любого $r\geqslant 0$.

Поступило
15 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, Л.— М., 1937.
[2] А. Ф. Тиман, ДАН, 77, № 6 (1951).