Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 6

МЕХАНИКА

Академик И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ ФОРМАХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАШИННОГО АГРЕГАТА

При рассмотрении движения машинных агрегатов движущие силы и силы сопротивления приводятся к одному из звеньев и заменяются эквивалентными этим силам приведенными моментами [1]. Точно так же к этому же звену агрегата приводятся и все массы агрегата и заменяются эквивалентными приведенной массой или приведенным моментом инерции.

Пусть

$$M = M_Д - M_C,$$

где $M_Д$ — приведенный момент движущих сил и M_C — приведенный момент сил сопротивления.

Величина M в зависимости от механических характеристик двигателя и рабочей машины может быть функцией угла φ поворота звена приведения, угловой скорости ω звена приведения и времени t — в отдельности или в любой комбинации этих параметров. Предположим, для общности, что M есть функция φ, ω и t, т. е.

$$M = M(\varphi, \omega, t). \tag{1}$$

Точно так же и приведенный момент инерции $I_П$, если учитывать массы обрабатываемого в рабочей машине продукта, может быть функцией этих трех параметров в отдельности или в их любой комбинации, т. е.

$$I_П = I_П(\varphi, \omega, t). \tag{2}$$

Рассмотрим тот случай, когда связи, налагаемые на движение звеньев машинного агрегата и обрабатываемого продукта, будут голономными и стационарными.

Из уравнения

$$M = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \tag{3}$$

где

$$T = \frac{I_П(\varphi, \omega, t)\,\omega^2}{2}, \tag{4}$$

учитывая условия (1) и (2), получаем:

$$M(\varphi, \omega, t) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial\left[\dfrac{I_П(\varphi, \omega, t)\,\omega^2}{2}\right]}{\partial \omega}\right\} - \frac{\partial\left[\dfrac{I_П(\varphi, \omega, t)\,\omega^2}{2}\right]}{\partial \varphi}. \tag{5}$$

После очевидных преобразований получаем

$$M(\varphi, \omega, t) = I_П \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial I_П}{\partial \varphi} + \omega \frac{\partial I_П}{\partial t} + 2\omega \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial I_П}{\partial \omega} +$$

$$+ \frac{\omega^3}{2} \frac{\partial^2 I_П}{\partial \omega \, \partial \varphi} + \frac{\omega^2}{2} \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial^2 I_П}{\partial \omega^2} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^2 I_П}{\partial \omega \, \partial t}. \tag{6}$$

Уравнение (6) будет уравнением движения машинного агрегата при принятых выше предположениях.

Из обобщенного уравнения движения агрегата как частные случаи могут быть получены все остальные формы уравнений движения.

Так, если приведенный момент инерции $I_П = I_П(\varphi, t)$ и не зависит от угловой скорости ω, то уравнение (6) примет вид:

$$M(\varphi, \omega, t) = I_П \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial I_П}{\partial \varphi} + \omega \frac{\partial I_П}{\partial t}. \tag{7}$$

Если приведенный момент инерции $I_П = I_П(\omega, t)$ и не зависит от угла φ, то уравнение (6) примет вид:

$$M(\varphi, \omega, t) = I_П \frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{\partial I_П}{\partial t} + 2\omega \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial I_П}{\partial \omega} + \frac{\omega^2}{2} \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial^2 I_П}{\partial \omega^2} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^2 I_П}{\partial \omega \, dt}. \tag{8}$$

Если приведенный момент инерции $I_П = I_П(\varphi, \omega)$ и не зависит и от времени t, то уравнение (6) принимает вид:

$$M(\varphi, \omega, t) = I_П \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial I_П}{\partial \varphi} + 2\omega \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial I_П}{\partial \omega} + \frac{\omega^3}{2} \frac{\partial^2 I_П}{\partial \omega \, \partial \varphi} + \frac{\omega^2}{2} \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial^2 I_П}{\partial \omega^2}. \tag{9}$$

Если приведенный момент инерции $I_П = I_П(\varphi)$ и не зависит ни от угловой скорости ω, ни от времени t, то мы получаем известное уравнение [1]:

$$M(\varphi, \omega, t) = I_П \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_П}{d\varphi}, \tag{10}$$

которое характерно для тех агрегатов, в которых массы обрабатываемого продукта не оказывают существенного влияния на приведенный момент инерции $I_П$ или эта масса поступает в рабочую машину в функции угла поворота φ.

Если приведенный момент инерции $I_П = I_П(\omega)$ и не зависит от угла поворота φ и времени t, то уравнение движения (6) получает следующий вид:

$$M(\varphi, \omega, t) = I_П \frac{d\omega}{dt} + 2\omega \frac{d\omega}{dt} \frac{dI_П}{d\omega} + \frac{\omega^2}{2} \frac{d\omega}{dt} \frac{d^2 I_П}{d\omega^2}. \tag{11}$$

Если приведенный момент инерции $I_П = I_П(t)$ и не зависит от угла поворота φ и угловой скорости ω, то уравнение движения (6) будет иметь вид:

$$M(\varphi, \omega, t) = I_П \frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{dI_П}{dt}. \tag{12}$$

Наконец, если $I_П = \text{const}$ и не зависит ни от одного из переменных: φ, ω или t, то уравнение движения будет:

$$M(\varphi, \omega, t) = I_П \frac{d\omega}{dt}. \tag{13}$$

В настоящей работе мы не рассматривали случай изменения массы рабочего продукта за счет выброса отдельных частиц этой массы, как это было сделано И. В. Мещерским ([2]) применительно к задаче динамики точки переменной массы. Если такой выброс имеет место, то выведенные уравнения должны быть дополнены членом, характеризующим возникающий при этом реактивный момент.

Отметим, что уравнение (12), полученное нами как частный случай уравнения (6) движения машинного агрегата, имеет форму, аналогичную уравнению И. В. Мещерского ([2]) для случая движения точки переменной массы, когда абсолютная скорость отбрасываемой частицы равна нулю.

Как частные случаи уравнения (6) нами получены уравнения (10) и (13). Как известно, уравнение (10) есть уравнение движения машины-двигателя или рабочей машины без учета массы обрабатываемого продукта, а уравнение (13) есть общее уравнение динамики тела, вращающегося около неподвижной оси.

Поступило
27 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Артоболевский, Теория механизмов и машин, 1940. [2] И. В. Мещерский, Динамика точки переменной массы, 1897 (в книге И. В. Мещерский, Работы по механике тел переменной массы, М.— Л., 1949).