Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

И. И. ОГИЕВЕЦКИЙ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СИНУС-РЯДОВ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ВЫПУКЛЫХ КВЕРХУ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 3 III 1951)

В работах ([2], [3]) было показано, что в интервале $0 < x < \pi$ частные суммы синус-ряда Фурье положительной непрерывной выпуклой кверху функции положительны, а их средние арифметические не превосходят порождающей ряд функции.

В настоящей заметке рассматриваются общие методы суммирования, для которых имеют место аналогичные свойства.

Теорема 1. *Пусть матрица множителей*

$$\begin{matrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots & q_{0N_0} \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1N_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n0} & q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nN_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

удовлетворяет условиям:

$$1^\circ \qquad q_{n0} = 1, \; 0 < q_{nk} < 1, \; k = 1, 2, \ldots, N_n, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$2^\circ \qquad 1 + 2\sum_{k=1}^{N_n} q_{nk} \cos kx \geqslant 0, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Если

$$s_n(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\alpha) \sin k\alpha \, d\alpha$$

n-я частная сумма синус-ряда положительной непрерывной выпуклой кверху функции $f(x)$ и

$$U_n\{f, x\} = \sum_{k=1}^{N_n} q_{nk} b_k \sin kx$$

ее q_{nk}-среднее, то справедливо неравенство

$$U_n\{f, x\} \leqslant f(x), \quad 0 < x < \pi.$$

Теорему докажем сначала для функции $f_1(x)$, определенной следующим образом:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{b}{a}x, & 0 \leqslant x \leqslant a, \\ b\frac{\pi - x}{\pi - a}, & a \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases} \quad 0 < a < \pi$$

Синус-ряд Фурье этой функции

$$f_1(x) = \frac{2b}{a(\pi - a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin ka \sin kx}{k^2}. \tag{1}$$

Для этого ряда

$$U_n\{f_1, x\} = \frac{2b}{a(\pi - a)} \sum_{k=1}^{N_n} q_{nk} \frac{\sin ka \sin kx}{k^2}. \tag{2}$$

Покажем, что разность

$$\psi(a, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin ka \sin kx}{k^2} - \sum_{k=1}^{N_n} q_{nk} \frac{\sin ka \sin kx}{k^2} \tag{3}$$

положительна для $0 < x < \pi$, $0 < a < \pi$.

Так как $\psi(a, x) = \psi(x, a)$, $\psi(x, x) > 0$, то можно ограничиться случаем $x < a$.

Из [4]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin ka \sin kx}{k^2} = \begin{cases} \frac{(\pi - a)x}{2}, & x \leqslant a; \\ \frac{(\pi - x)a}{2}, & x \geqslant a, \end{cases} \tag{4}$$

следует, что

$$\psi(a, x) = \frac{(\pi - a)x}{2} - \sum_{k=1}^{N_n} q_{nk} \frac{\sin ka \sin kx}{k^2}. \tag{5}$$

Отсюда

$$\psi(a, 0) = 0, \qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{\pi - a}{2} - \sum_{k=1}^{N_n} q_{nk} \frac{\sin ka}{k} = \varphi(a)$$

и

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial a^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

Применив формулу Даламбера, получим

$$\psi(a, x) = \frac{1}{2} \int_{a-x}^{a+x} \varphi(\alpha)\, d\alpha. \tag{6}$$

Из (4), (5) и условия 2° теоремы вытекает, что $\varphi(a)$ положительна для $0 < a < \pi$, нечетна и имеет период 2π. Из этого и (6) получим, что $\psi(a, x) > 0$ при $0 < x < \pi$, $0 < a < \pi$. Так как $f_1(x)$ отличается положительным множителем от $\psi(a, x)$, то, следовательно, $f_1(x) > 0$ при $0 < x < \pi$, $0 < a < \pi$.

Покажем, что теорема справедлива для произвольного выпуклого полигона. Каждый n-вершинный выпуклый кверху полигон можно представить как сумму двух выпуклых полигонов с меньшим числом сторон. Действительно, полигон

$$(0, 0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_{n-2}, y_{n-2}),\ (0, 0)$$

равен сумме $(n-1)$-вершинного полигона

$$((0, 0),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3),\ \ldots,\ (x_{n-2}, y_{n-2}),\ (0, 0)$$

и трехвершинного

$$(0, 0),\ \left(x_1, y_1 - \frac{y_2}{x_2} x_1\right),\ (x_2, 0).$$

Из справедливости теоремы для трехвершинного полигона и линейности операции $U_n\{f, x\}$ вытекает ее справедливость для 4-, 5- и n-вершинного полигона. Так как любую непрерывную выпуклую кверху функцию можно с произвольной точностью приблизить выпуклым кверху полигоном, то предельный переход указывает на справедливость теоремы в общем случае.

Теорема 2. *Пусть матрица множителей*

$$\begin{array}{l} q_{00}\ q_{01}\ q_{02} \cdots q_{0N_0} \\ q_{10}\ q_{11}\ q_{12} \cdots q_{1N_1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ q_{n0}\ q_{n1}\ q_{n2} \cdots q_{nN_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

удовлетворяет условиям

$$1^\circ \quad q_{nk} > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, N_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$2^\circ \quad q_{nk} > q_{n,\,k+1},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$U_n\{f, x\} > 0,$$

где $U_n\{f, x\}$ — q_{nk}-*среднее синус-ряда неотрицательной выпуклой кверху функции.*

Доказательство проведем для случая функции $f_1(x)$; переход к общему случаю проводится так же, как и в теореме 1.

Так как

$$U_n\{f_1, x\} = \frac{2b}{a(\pi - a)} \sum_{k=1}^{N_n} q_{nk} \frac{\sin ka \sin kx}{k^2},$$

то достаточно показать, что

$$\Phi(a, x) = \sum_{k=1}^{N_n} q_{nk} \frac{\sin ka \sin kx}{k^2} > 0.$$

Вследствие $\Phi(a, x) = \Phi(x, a)$, $\Phi(x, x) > 0$, можно ограничиться случаем $x < a$.

Но

$$\Phi(a, 0) = 0,\ \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x=0} = \sum_{k=1}^{N_n} q_{nk} \frac{\sin ka}{k} = \varphi_1(a) \tag{7}$$

и

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial a^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}.$$

Поэтому

$$\Phi(a, x) = \frac{1}{2}\int_{a-x}^{a+x} \varphi_1(\alpha)\, d\alpha. \tag{8}$$

Так как частные суммы синус-ряда функции $\frac{\pi-a}{2}$ положительны для $0<\alpha<\pi$ ([1]), то, применив преобразование Абеля к (7), получим, учитывая условия теоремы, что $\varphi_1(\alpha)>0$ при $0<\alpha<\pi$. Учитывая нечетность и периодичность $\varphi_1(\alpha)$ и положительность $\varphi_1(\alpha)$ при $0<\alpha<\pi$, получим из (8), что $\Phi(a, x)>0$ при $0<x<\pi$, $0<a<\pi$.

Следовательно, $U_n\{f_1, x\}>0$.

Нетрудно проверить, что условиям теорем 1 и 2 удовлетворяют методы суммирования Гельдера $\left(q_{nk}=\left(1-\frac{k}{n+1}\right)^{\alpha}, \alpha \text{ — порядок метода суммирования}\right)$; Чезаро (C, δ), $\delta\geqslant 1$ $\left(q_{nk}=\frac{A_{n-k}^{\delta}}{A_n^{\delta}},\ A_n^{\delta}=\frac{(\delta+1)(\delta+2)\cdots(\delta+n)}{n!}\right)$; Валле-Пуссена $\left(q_{nk}=\frac{(n!)^2}{(n-k)!\,(n+k)!}\right)$ и введенный в ([5]) метод суммирования Джексона $q_{nk}=\frac{1}{2n(2n^2+1)}\left[\frac{(2n-k+1)!}{(2n-k-2)!}-4\frac{(n-k+1)!}{(n-k-2)!}\right]$, $0\leqslant k\leqslant n-2$. $q_{nk}=\frac{1}{2n(2n^2+1)}\,\frac{(2n-k+1)!}{(2n-k-2)!}$, $n-2<k\leqslant 2n-2$.

Поэтому для q_{nk}-среднего, соответствующего этим методам, справедливо неравенство

$$0<U_n\{f, x\}\leqslant f(x),\quad 0<x<\pi. \tag{9}$$

Используя преобразование Абеля, нетрудно убедиться в справедливости (9) и для метода суммирования Абеля.

Левая часть неравенства (9) справедлива для метода суммирования С. Н. Бернштейна $\left(q_{nk}=\cos\frac{k\pi}{2n+1},\ k=0, 1, 2, \ldots, n\right)$.

Поступило
24 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939. [2] L. Koschmieder, Monatsh. f. Math. u. Phys., 39, 321 (1932). [3] L. Fejer, ZAMM, 13, 80 (1933). [4] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, 1933, [5] Г. П. Сафронова, ДАН, 73, 277 (1950).