Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

И. Ф. ЛОХИН

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, РЕГУЛЯРНЫХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 1 III 1951)

В настоящей заметке доказывается следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы числа* A_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *являлись значениями в точках*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \sigma < \infty \tag{1}$$

функции $f(z)$, *регулярной в полуплоскости* $\operatorname{Re} z > 0$ *и такой, что для любого* z *из* $\operatorname{Re} z > 0$

$$|f(z)| < e^{b|z|}, \tag{2}$$

где b — *постоянное число, и для любого* x, $\lambda_1 - \delta \geqslant x \geqslant \delta > 0$,

$$|f(x+iy)| < c(\delta)\, e^{\theta|y|}, \quad \theta < \pi\sigma, \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность полиномов

$$P_k(t) = \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{A_\nu}{\varphi'(\lambda_\nu)} e^{-\lambda_\nu t}, \quad \varphi(t) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{t^2}{\lambda_\nu^2}\right) \tag{4}$$

сходилась в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} t > \alpha$ *и ее предельная функция* $F(t)$ *была регулярна в этой полуплоскости и в некоторой полосе* $|\operatorname{Im} t| \leqslant \eta_0$ $(\eta_0 > 0)$ *и удовлетворяла условиям:*

$$\left.\begin{array}{ll} |F(t)| = |F(\xi + i\eta)| < e^{-(\lambda_1-\delta)\xi} & \text{для } \xi > \xi_0(\delta) > 0, \\ |F(t)| = |F(\xi + i\eta)| < e^{-\delta\xi} & \text{для } \xi < -\xi_0(\delta). \end{array}\right\} |\eta| \leqslant \eta_0 \tag{5}$$

При доказательстве теоремы будем опираться на следующую теорему А. Ф. Леонтьева [1]:

А. *Пусть последовательность чисел* λ_n *удовлетворяет условию* (1), *а последовательность полиномов*

$$P_n(z) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu} e^{-\lambda_\nu z} \tag{6}$$

сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha$ *к регулярной функции* $F(z)$. *Тогда коэффициенты* $a_{n\nu}$ *при любом фиксированном* ν *имеют пределы при* $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n\nu} = a_\nu$, *и существует целая функция* $\omega(z)$ *первого порядка нормального типа со свойствами:*

$$\omega(\lambda_\nu)=\alpha_\nu\varphi'(\lambda_\nu)\quad(\nu=1,2,\ldots),\qquad \varphi(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_\nu^2}\right). \tag{7}$$

Функция $\omega(z)$ *вдоль каждого луча* $\arg z=\vartheta\neq 0$ *при больших* $|z|$ *представляется интегралом:*

$$\omega(z)=-\varphi(z)\int_{C(t)}F(\zeta)e^{z\zeta}d\zeta, \tag{8}$$

где контур $C(t)$, *выходящий из точки* t *и расположенный целиком в полуплоскости регулярности функции* $F(\zeta)$, *начиная с некоторого места уходит в бесконечность по прямой, образующей с положительным направлением действительной оси такой угол* ψ, $-\pi/2<\psi<\pi/2$, *что* $\cos(\psi+\vartheta)<0$.

Теперь докажем формулированную выше теорему.

Докажем сначала достаточность указанных в теореме условий.

Рассмотрим функцию

$$f_1(s)=\int_{-\infty+i\eta}^{+\infty+i\eta}F(t)e^{st}\,dt,\quad s=x+iy,\quad t=\xi+i\eta. \tag{9}$$

Нетрудно убедиться, исходя из (5), что $f_1(s)$ будет функцией, аналитической в полосе $0<\delta<x<\lambda_1-\delta$, не зависящей от η (из $|\eta|\leqslant\eta_0$) и в полосе $2\delta\leqslant x\leqslant\lambda_1-2\delta$ $(4\delta<\lambda_1)$

$$|f_1(s)|<C_1(\delta)e^{-\eta_0|y|}. \tag{10}$$

Образуем теперь функцию

$$f(s)=-\varphi(s)f_1(s)=-\varphi(s)\int_{-\infty+i\eta}^{+\infty+i\eta}F(t)e^{st}\,dt. \tag{11}$$

Полагая здесь $\eta=0$, представим эту функцию в виде:

$$f(s)=-\varphi(s)\int_{-\infty}^{-C}F(t)e^{st}\,dt-\varphi(s)\int_{-C}^{C}F(t)e^{st}\,dt-\varphi(s)\int_{C}^{+\infty}F(t)e^{st}dt. \tag{12}$$

Очевидно, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{-C}F(t)e^{st}dt$ представляет функцию, аналитическую в полуплоскости $x>\delta$; интеграл $\int\limits_{-C}^{C}F(t)e^{st}dt$ будет целой функцией. Третье слагаемое в правой части равенства (12), в силу А, будет целой функцией $\omega(s)$, которая в точках λ_ν принимает значения A_ν.

Поэтому $f(s)$ — функция, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re}s>\delta$ и $f(\lambda_\nu)=A_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots)$, так как первое и второе слагаемые в правой части (12) обращаются в нуль в точках λ_ν $(\nu=1,2,\ldots)$. Условие (3) для функции $f(s)$ следует из (11) и равенства:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|\varphi(re^{i\theta})|}{r}=\pi\sigma|\sin\theta|\quad\text{для}\quad\theta\neq 0,\pi. \tag{13}$$

Далее, оценивая каждое слагаемое в правой части равенства (12), получим условие (2) для функции $f(s)$.

Так как δ — произвольно малое положительное число, то $f(s)$ будет функция, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re}s>\delta$. Итак, достаточность условий теоремы доказана.

Докажем теперь необходимость этих условий. Пусть $f(s)$ — функция, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$, и удовлетворяет условиям (2) и (3). Рассмотрим функцию

$$f_1(s) = \frac{f(s)}{\varphi(s)}, \quad s = x + iy, \quad \varphi(s) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{s^2}{\lambda_\nu^2}\right). \tag{14}$$

Эта функция будет регулярна в полосе $0 < x < \lambda_1$.

Из (3) и (13) следует оценка:

$$|f_1(x + iy)| < C(\delta)\, e^{-\eta_1 |y|} \tag{15}$$

для $|y|$ достаточно больших при x: $0 < \delta/2 \leqslant x \leqslant \lambda_1 - \delta/2$, где η_1 — число, удовлетворяющее условию $0 < \eta_1 < \pi\sigma - \theta$.

Тогда функция $F(t)$, $t = \xi + i\eta$, определяемая интегралом:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{-ts} f_1(s)\, ds, \tag{16}$$

будет аналитической, не зависящей от x, $\delta/2 \leqslant x \leqslant \lambda_1 - \delta/2$, и в полосе $|\eta| \leqslant \eta_0 < \eta_1$ справедлива оценка:

$$\begin{aligned} &|F(t)| < e^{-(\lambda_1 - \delta)\xi} \quad \text{для} \quad \xi > \xi_0(\delta) > 0, \\ &|F(t)| < e^{-\delta\xi} \quad \text{для} \quad \xi < -\xi_0(\delta), \end{aligned} \tag{17}$$

где δ — любое малое положительное число.

Теперь убедимся, что эта функция будет регулярной в некоторой полуплоскости и является предельной для некоторой подпоследовательности частных сумм ряда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{f(\lambda_\nu)}{\varphi'(\lambda_\nu)} e^{-\lambda_\nu t}$.

Для этого рассмотрим два луча, исходящие из точки $s = \delta$, $0 < \delta < \lambda_1$, и образующие с действительной осью достаточно малые углы ε_1 и $-\varepsilon_1$. Контур, составленный из этих лучей, обозначим через L. Далее рассмотрим систему окружностей M_k с центром в начале, на которых справедлива оценка

$$|\varphi(t)| > e^{-\varepsilon |t|} \quad \text{при} \quad k > k(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0. \tag{18}$$

Существование такой системы окружностей следует из того, что минимум $|\varphi(t)|$ на окружности $|t| = \rho$ принимается в точке $t = \rho$, и из факта

$$\overline{\lim_{\rho\to\infty}} \frac{\ln|\varphi(\rho)|}{\rho} = 0. \tag{19}$$

Дугу окружности M_k, лежащую внутри контура L, обозначим через γ_k, а контур, образованный дугой γ_k и отрезками лучей L от точки $s = \delta$ до точек встречи с M_k, через L_k. Рассмотрим функцию

$$\Phi_k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_k} f_1(s)\, e^{-ts}\, ds. \tag{20}$$

По теореме о вычетах находим

$$\Phi_k(t) = \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{f(\lambda_\nu)}{\varphi'(\lambda_\nu)} e^{-\lambda_\nu t}, \tag{21}$$

где λ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, m_k$) — нули функции $\varphi(s)$, лежащие внутри контура L_k.

Далее заметим, что из оценок (2), (13) следует, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L f_1(s) e^{-ts} ds \tag{22}$$

определяет некоторую функцию $\Phi(t)$, регулярную в угле, содержащемся в полуплоскости $\operatorname{Re} t > 0$, стороны которого соответственно перпендикулярны к лучам контура L и которые отсекают на этих лучах отрезки, равные, например, $b+1$. Но так как ε_1 — произвольно малое положительное число, то функция $\Phi(t)$ будет регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} t > b+1$. С другой стороны, при любом t из этой полуплоскости, в силу (2), (13) и (18), получаем:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\gamma_k} f_1(s) e^{-st} ds = 0. \tag{23}$$

Поэтому из (20), (21) и (23) следует

$$\Phi(t) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{f(\lambda_\nu)}{\varphi'(\lambda_\nu)} e^{-\lambda_\nu t}. \tag{24}$$

Покажем теперь, что функция $\Phi(t)$ при $t > 0$ и достаточно больших будет равна функции $F(t)$.

Действительно, рассмотрим прямую $\operatorname{Re} s = \delta$. Пусть β_k — дуга окружности M_k, лежащая в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant \delta$, и l_k — контур, состоящий из дуги β_k и отрезка прямой $\operatorname{Re} s = \delta$, лежащего внутри окружности M_k.

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{l_k} f_1(s) e^{-st} dt = \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{f(\lambda_\nu)}{\varphi'(\lambda_\nu)} e^{-\lambda_\nu t}. \tag{25}$$

Далее, в силу (2), (3), (23) и (18), при $t > 0$ и достаточно больших имеем

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\beta_k} f_1(s) e^{-st} ds = 0. \tag{26}$$

Поэтому из (25) и (26) при указанных t следует

$$F(t) = \Phi(t).$$

Таким образом, теорема полностью доказана.

Поступило
28 XI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ф. Леонтьев, Матем. сборн., 24 (66): 3, 347 (1949).