Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 6

МАТЕМАТИКА

С. А. ЧУНИХИН

СИЛОВСКИЕ СВОЙСТВА И ПОЛУИНВАРИАНТНЫЕ ПОДГРУППЫ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 24 II 1951)

§ 1. В ряде предыдущих статей (1–8) мы уже исследовали некоторые из свойств конечных групп, связанные с существованием и сопряженностью таких подгрупп, у которых порядки взаимно просты с их индексами. Такие свойства мы назвали (8) силовскими свойствами. Эти исследования проводились нами в двух направлениях: в направлении теорем Силова и Голла (1–7) и в направлении теоремы Шура — Цассенхауза (8).

В работе (6) мы доказали, что наши предыдущие результаты, относящиеся к первому направлению, остаются справедливыми, если понятие инвариантной подгруппы, входящее в условия этих теорем при посредстве нормальных рядов, заменить более слабыми требованиями. Сейчас мы покажем, что подобное ослабление условий возможно и для наших результатов во втором направлении (8) — в направлении теоремы Шура — Цассенхауза.

§ 2. В дальнейшем мы применяем с небольшими видоизменениями следующие наши прежние обозначения и определения (6, 8): Π — некоторое непустое множество простых чисел; $\mathfrak{G}$ — всегда некоторая конечная группа порядка g; всякое число $d>1$, делящее g и такое, что каждый его простой делитель входит в Π и $(d, g/d)=1$, а также и 1 назовем Π-силовским делителем порядка g группы $\mathfrak{G}$; если $\mathfrak{G}_1$ — некоторая подгруппа порядка g_1 $(1 \leqslant g_1 \leqslant g)$ из $\mathfrak{G}$, то совокупность всех подгрупп из $\mathfrak{G}$, содержащих $\mathfrak{G}_1$ (включая также и $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}_1$), назовем фактор-структурой группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе $\mathfrak{G}_1$ и обозначим ее через $\mathfrak{G}/\!\!/\mathfrak{G}_1$; число g/g_1 назовем индексом $\mathfrak{G}/\!\!/\mathfrak{G}_1$.

Пусть b_1 — наибольший Π-силовский делитель числа g/g_1. Тогда в случае, если $b_1=1$ или же если при $b_1>1$ фактор-структура $\mathfrak{G}/\!\!/\mathfrak{G}_1$ содержит по крайней мере одну подгруппу $\mathfrak{B}_1$ порядка b_1g_1, имеющую нормальный ряд, проходящий через $\mathfrak{G}_1$ и у которого на участке от $\mathfrak{B}_1$ до $\mathfrak{G}_1$ все индексы являются простыми числами из Π, причем все подгруппы порядка b_1g_1 из $\mathfrak{G}/\!\!/\mathfrak{G}_1$ сопряжены с $\mathfrak{B}_1$ в $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}/\!\!/\mathfrak{G}_1$ назовем фактор-структурой типа $\Pi - 1$. Если $g/g_1=a_1b_1$ и если фактор-структура $\mathfrak{G}/\!\!/\mathfrak{G}_1$ типа $\Pi - 1$ содержит подгруппу $\mathfrak{A}_1$ порядка a_1g_1, причем все подгруппы порядка a_1g_1 из $\mathfrak{G}/\!\!/\mathfrak{G}_1$ сопряжены с $\mathfrak{A}_1$ в $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}/\!\!/\mathfrak{G}_1$ назовем фактор-структурой типа $\Pi - 2$. Если $\mathfrak{G}/\!\!/\mathfrak{E}$, где $\mathfrak{E}$ — единичная подгруппа $\mathfrak{G}$, имеет тип $\Pi - 1$ или $\Pi - 2$, то и $\mathfrak{G}$ назовем, соответственно, группой типа $\Pi - 1$ или $\Pi - 2$. Единичную группу $\mathfrak{E}$ мы, по определению, причисляем к разрешимым группам, причем ее единственным нормальным рядом считаем ряд $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}$. Пусть $g=ab$, где b — наибольший Π-силовский делитель g; тогда подгруппу $\mathfrak{G}_1$ назовем Π-перестановочной в $\mathfrak{G}$, если $b=1$ или же если при $b>1$ $\mathfrak{G}_1$

перестановочна с любой силовской подгруппой из $\mathfrak{G}$, порядок которой делит b.

Введем еще следующие новые определения.

Определение 1. Если П-перестановочная подгруппа $\mathfrak{G}_1$ группы $\mathfrak{G}$ перестановочна с любым элементом из $\mathfrak{G}$, порядок которого есть степень любого простого числа, делящего a, то $\mathfrak{G}_1$ назовем П-полуинвариантной в $\mathfrak{G}$ или полуинвариантной в $\mathfrak{G}$ относительно П.

Определение 2. Ряд подгрупп $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_l = \mathfrak{E}$ при $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{E}$ и ряд $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}$ при $\mathfrak{G} = \mathfrak{E}$, у которого каждый последующий член является П-полуинвариантной подгруппой предыдущего, назовем П-полуинвариантным рядом $\mathfrak{G}$.

Теорема. *Для того чтобы конечная группа $\mathfrak{G}$ была типа* П — 2, *необходимо и достаточно, чтобы у $\mathfrak{G}$ существовал* П-*полуинвариантный ряд, все фактор-структуры которого были бы типа* П — 2.

Доказательство. Условие достаточно. Допустим, что существуют группы, для которых теорема неверна. Выберем тогда среди таких групп группу $\mathfrak{G}$, имеющую наименьший порядок g. Следовательно, существует такое П и такой П-полуинвариантный ряд, что все фактор-структуры у него типа П — 2, но сама $\mathfrak{G}$ не типа П — 2. Так как для единичной группы теорема верна при любом П, то $\mathfrak{G}$ отлична от $\mathfrak{E}$.

Пусть ряд $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_l = \mathfrak{E}$ является тем П-полуинвариантным рядом $\mathfrak{G}$, который удовлетворяет условиям теоремы.

Очевидно, что при $b = 1$ теорема была бы для $\mathfrak{G}$ верна, поэтому $b > 1$.

Так как П-полуинвариантный ряд является, очевидно, и П-перестановочным рядом, то, согласно теореме 3 нашей работы [6]:

А. $\mathfrak{G}$ *содержит разрешимую подгруппу $\mathfrak{B}$ порядка b и все подгруппы этого порядка из $\mathfrak{G}$ сопряжены с $\mathfrak{B}$.*

Пусть δ — наибольший П-силовский делитель числа g_1, т. е. пусть $g_1 = \delta\delta'$, $(\delta, \delta') = 1$. Так как $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{E}$, то $g / g_1 = a_1 b_1 > 1$.

Рассмотрим далее все 3 возможных случая.

1) $l = 1$. В этом случае рассматриваемый П-полуинвариантный ряд $\mathfrak{G}$ приобретает вид $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{E}$. Единственная его фактор-структура $\mathfrak{G} /\!\!/ \mathfrak{E}$ по условию типа П — 2. Но это значит, что и $\mathfrak{G}$ типа П — 2. Получилось противоречие.

2) $l > 1$, $a_1 < g / g_1$. Так как $\mathfrak{G} /\!\!/ \mathfrak{G}_1$ по условию типа П — 2, то $\mathfrak{G} /\!\!/ \mathfrak{G}_1$ содержит подгруппу $\mathfrak{A}_1$ порядка $a_1 g_1$ и все подгруппы этого порядка из $\mathfrak{G} /\!\!/ \mathfrak{G}_1$ сопряжены с $\mathfrak{A}_1$. Рассмотрим ряд $\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_l = \mathfrak{E}$.

Докажем прежде всего следующее вспомогательное предложение:

Б. *Если подгруппа $\mathfrak{G}_1$* П-*полуинвариантна в $\mathfrak{G}$ и если индекс $\mathfrak{G}_1$ в некоторой ее содержащей подгруппе $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{G}$ не делится ни на одно простое число из* П, *то $\mathfrak{G}_1$ инвариантна в $\mathfrak{M}$.*

Действительно, допустим противное, т. е. что нормализатор $\mathfrak{B}_{\mathfrak{G}_1}$ группы $\mathfrak{G}_1$ в $\mathfrak{M}$ отличен от $\mathfrak{M}$. Это значит, что среди простых чисел, делящих индекс $\mathfrak{G}_1$ в $\mathfrak{M}$, найдется такое q, что если q^β — высшая степень q, делящая порядок $\mathfrak{M}$, то порядок $\mathfrak{B}_{\mathfrak{G}_1}$ не разделится на q^β. Пусть $\mathfrak{Q}$ — произвольная силовская подгруппа порядка q^β из $\mathfrak{M}$. По условию q не входит в П и $\mathfrak{G}_1$ П-полуинвариантна в $\mathfrak{G}$. Это значит, что любой элемент из $\mathfrak{Q}$ перестановочен с $\mathfrak{G}_1$. Но тогда $\mathfrak{Q}$ войдет в $\mathfrak{B}_{\mathfrak{G}_1}$ и порядок $\mathfrak{B}_{\mathfrak{G}_1}$ разделится на q^β. Получилось противоречие, что и доказывает Б.

Согласно Б $\mathfrak{G}_1$ инвариантна и, следовательно, и П-полуинвариантна в $\mathfrak{A}_1$.

Кроме того, индекс a_1 подгруппы $\mathfrak{G}_1$ в $\mathfrak{A}_1$ не делится ни на одно простое число из П. Это значит, что $\mathfrak{A}_1 /\!\!/ \mathfrak{G}_1$ типа П — 2. Следовательно,

$\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_l = \mathfrak{E}$ является П-полуинвариантным рядом, у которого все фактор-структуры типа П — 2. Таким образом, $\mathfrak{A}_1$ удовлетворяет всем требованиям теоремы и ее порядок $a_1 g_1$ меньше g. Поэтому для $\mathfrak{A}_1$ теорема верна, т. е. $\mathfrak{A}_1$ будет типа П — 2. Так как наибольшим П-силовским делителем порядка $\mathfrak{A}_1$, очевидно, является δ, то это значит, что $\mathfrak{A}_1$ содержит подгруппу $\mathfrak{A}$ порядка $a_1\delta' = a$. Итак, $\mathfrak{G}$ имеет подгруппу $\mathfrak{A}$ порядка a. Пусть теперь $\mathfrak{A}^*$ — какая-либо другая подгруппа порядка a из $\mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{G}_1$ П-полуинвариантна в $\mathfrak{G}$ и a не делится ни на одно простое число из П, то очевидно, что любой элемент из $\mathfrak{A}^*$ перестановочен с $\mathfrak{G}_1$. Следовательно, $\mathfrak{A}^*\mathfrak{G}_1$ — группа. Ввиду $(b, \delta') = 1$ и $(a_1, \delta) = 1$ порядок $\mathfrak{A}^*\mathfrak{G}_1$ должен равняться $a_1\delta'\delta = a_1 g_1$. Так как $\mathfrak{G} /\!/ \mathfrak{G}_1$ типа П — 2, то две ее подгруппы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}^*\mathfrak{G}_1$ порядка $a_1 g_1$ в $\mathfrak{G}$ сопряжены: $A^{-1}\mathfrak{A}^*\mathfrak{G}_1 A = \mathfrak{A}_1$, $A \in \mathfrak{G}$. Это значит, что $A^{-1}\mathfrak{A}^* A$ и $\mathfrak{A}$ порядка a входят в $\mathfrak{A}_1$. Но $\mathfrak{A}_1$, как мы видели, типа П — 2. Поэтому $A^{-1}\mathfrak{A}^* A$ и $\mathfrak{A}$ сопряжены в $\mathfrak{A}_1$. Но тогда $\mathfrak{A}^*$ и $\mathfrak{A}$ сопряжены в $\mathfrak{G}$. Учитывая еще и А, видим, что $\mathfrak{G}$ будет типа П — 2. Получилось противоречие.

3) $l > 1$, $a_1 = g / g_1$. Все фактор-структуры ряда $\mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_l = \mathfrak{E}$ по условию типа П — 2 и $g_1 < g$. Поэтому для $\mathfrak{G}_1$ теорема справедлива, т. е. $\mathfrak{G}_1$ типа П — 2. Кроме того, $\mathfrak{G}_1$ будет, согласно Б, инвариантной в $\mathfrak{G}$. Следовательно, для $\mathfrak{G}$ можно построить нормальный ряд $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{E}$. Порядок первого его фактора $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}_1$ не делится, по условию, ни на одно простое число из П, поэтому он типа П — 2. Второй фактор $\mathfrak{G}_1 / \mathfrak{E} \simeq \mathfrak{G}_1$ будет, как мы видели выше, тоже типа П — 2. Таким образом, все факторы нормального ряда $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{E}$ типа П — 2, откуда, на основании теоремы 1 нашей работы ([8]), заключаем, что $\mathfrak{G}$ тоже типа П — 2. Опять получилось противоречие.

Достаточность условия доказана.

Условие необходимо. Пусть $\mathfrak{G}$ — типа П — 2. Тогда единственная фактор-структура П-полуинвариантного ряда $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{E}$ будет типа П — 2.

Поступило
22 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чунихин, ДАН, **55**, № 6 (1947). [2] С. А. Чунихин, ДАН, **58**, № 7 (1947). [3] С. А. Чунихин, ДАН, **59**, № 3 (1948). [4] С. А. Чунихин, ДАН, **60**, № 5 (1948). [5] С. А. Чунихин, ДАН, **66**, № 2 (1949). [6] С. А. Чунихин, ДАН, **69**, № 6 (1949). [7] С. А. Чунихин, Матем. сборн., **25** (67), № 3 (1949). [8] С. А. Чунихин, ДАН, **73**, № 1 (1950).