Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

Е. Б. ДЫНКИН

ОТНОШЕНИЯ ВКЛЮЧЕНИЯ МЕЖДУ НЕПРИВОДИМЫМИ ГРУППАМИ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 III 1951)

Рассматриваются связные группы унимодулярных* линейных преобразований комплексного N-мерного пространства $R^{(N)}$, неприводимые, т. е. не имеющие общего инвариантного подпространства. Находятся все типы включений между такими группами. Полученные результаты позволяют перечислить все максимальные подгруппы классических групп (см. по этому поводу (1)). О других приложениях будет сказано ниже.

Теорема 1. *Неприводимая связная группа $\mathfrak{G}^*$ унимодулярных линейных преобразований неприводима тогда и только тогда, когда она представляется в виде $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}_1^* \times \mathfrak{G}_2^* \times \cdots \times \mathfrak{G}_k^*$, где $\mathfrak{G}_i^*$ — связные неприводимые простые группы**. Неприводимая группа $\mathfrak{G}$ содержится в $\mathfrak{G}^*$ тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \cdots \times \mathfrak{G}_k$, где $\mathfrak{G}_i$ — неприводимые связные группы и $\mathfrak{G}_i \subseteq \mathfrak{G}_i^*$.*

Теорема 1 сводит общий вопрос о включениях к тому частному случаю, когда объемлющая группа является простой.

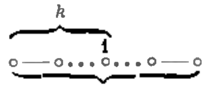
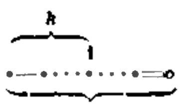
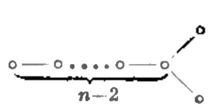
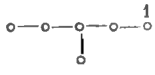
Линейные группы $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$, действующие, соответственно, в пространствах R_1 и R_2, называются эквивалентными, если можно изоморфно отобразить R_1 на R_2 так, чтобы при этом $\mathfrak{G}_1$ перешло в $\mathfrak{G}_2$. Включения $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_1^*$ и $\mathfrak{G}_2 \subset \mathfrak{G}_2^*$ между линейными группами мы будем считать принадлежащими к одному типу, если $\mathfrak{G}_1$ эквивалентна $\mathfrak{G}_2$ и $\mathfrak{G}_1^*$ эквивалентна $\mathfrak{G}_2^*$. Классы эквивалентных неприводимых групп можно задавать схемами, как это было указано в (1). Следовательно, типы включений между неприводимыми группами можно задавать парами таких схем.

Теорема 2. *Полное перечисление всех типов включений $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}^*$, где $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$ — неприводимые связные группы унимодулярных линейных преобразований, причем $\mathfrak{G}^*$ является простой и отлична от $SL(N)$, $O(N)$ и $Sp(N)$***, дается табл.* 1****.

* Унимодулярным называется линейное преобразование с детерминантом 1.

** Знак $\times$ обозначает кронекеровское произведение.

*** $SL(N)$ — группа всех унимодулярных преобразований, $O(N)$ — группа всех ортогональных унимодулярных преобразований, $Sp(N)$ — группа всех симплектических преобразований.

**** В таблице для экономии места обозначены: схема  через $\pi_k(n)$, схема  через $\rho_k(n)$, схема  через $\sigma(n)$ и схема  через ψ.

З а м е ч а н и е. Случай $\mathfrak{G}^* = SL(N)$ тривиален. Случаи $\mathfrak{G}^* = O(N)$ и $\mathfrak{G}^* = Sp(N)$ исчерпываются результатами А. И. Мальцева ([2]) (см. также ([3,4])).

Назовем включения $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_1^*$ и $\mathfrak{G}_2 \subset \mathfrak{G}_2^*$ э к в и в а л е н т н ы м и, если существует изоморфное отображение пространства, где действует первая пара групп, на пространство, где действует вторая пара, переводящее первую пару групп во вторую. Каждый тип включений может, вообще говоря, распадаться на несколько классов эквивалентных включений.

Т а б л и ц а 1

№	Схема $\mathfrak{G}$	Схема $\mathfrak{G}^*$	№	Схема $\mathfrak{G}$	Схема $\mathfrak{G}^*$	№	Схема $\mathfrak{G}$	Схема $\mathfrak{G}^*$
1	C_n	A_{2n-1}	13		$\pi_2(15)$	25		$\rho_4(28)$
2	B_n	$\pi_k(2n)$	14		$\pi_3(15)$	26		$\rho_5(28)$
3	B_n	$\pi_n(2n)$	15		$\pi_2(26)$	27		$\sigma(5)$
4	D_n	$\pi_k(2n-1)$	16		$\pi_3(26)$	28		$\sigma(5)$
5	D_n	$\pi_{n-1}(2n-1)$	17		$\pi_4(26)$	29		$\sigma(7)$
6	A_n	$\pi_2\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)$	18		$\rho_2(10)$	30		$\sigma(7)$
7	A_n	$\pi_2\left(\frac{n(n+3)}{2}\right)$	19		$\rho_2(7)$	31		$\sigma(7)$
8	$B_{n_1} \cdot B_{n_2}$	$\sigma(n_1+n_2+1)$	20		$\rho_3(7)$	32		$\sigma(8)$
9	$B_n \cdot A_1$	$\sigma(n+3)$	21		$\rho_2(16)$	33		$\sigma(13)$
10	B_n	D_{n+1}	22		$\rho_3(16)$	34		ψ
11			23		$\rho_2(28)$	35		ψ
12			24		$\rho_3(28)$	36		ψ

Т е о р е м а 2а. *Каждый тип включений между неприводимыми связными группами унимодулярных матриц состоит из эквивалентных включений. Исключениями являются только типы* 27, 29, 30, 31, 33, 34 *и* 35 *(см. таблицу), каждый из которых распадается на два класса эквивалентных между собой включений, и эти два класса переводятся друг в друга внешним автоморфизмом объемлющей группы* (D_n *или* E_6).

Теоремы 1—2а полностью решают вопрос о включениях. Перейдем к приложениям. Пусть группа $\mathfrak{G}$ линейных унимодулярных преобразований не содержится ни в какой связной группе унимодулярных преобразований, отличной от $O(N)$, $Sp(N)$, $SL(N)$ (согласно теоремам 1—2 для этого достаточно, чтобы $\mathfrak{G}$ была простой связной неприводимой группой и не входила в таблицу). Пусть каждое из преобразований группы $\mathfrak{G}$ сохраняет неизменным некоторое свойство P системы векторов $\xi, \eta, \ldots, \omega$ пространства $R^{(N)}$. Рассмотрим группу $\mathfrak{G}_P$ в с е х линейных преобразований, сохраняющих P. Выделим в $\mathfrak{G}_P$ связную компоненту единицы и обозначим через $\overset{0}{\mathfrak{G}}_P$ совокупность всех унимодулярных преобразований из этой компоненты. Очевидно, $\mathfrak{G} \subseteq \overset{0}{\mathfrak{G}}_P$. Следовательно, либо $\overset{0}{\mathfrak{G}}_P$ совпадает с $Sp(N)$, $O(N)$ или $SL(N)$, либо $\overset{0}{\mathfrak{G}}_P = \mathfrak{G}$, и тогда $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{G}_P \subseteq N(\mathfrak{G})$, где $N(\mathfrak{G})$ — нормализатор $\mathfrak{G}$ в группе всех невырожденных матриц. Подобные рассуждения, будучи применены к конкретным группам $\mathfrak{G}$, дают целую серию различных теорем, из которых мы приведем некоторые в качестве примеров (пространство R во всех примерах рассматривается над полем комплексных чисел).

А. Пусть R — пространство всех матриц порядка n и C — некоторое линейное преобразование пространства R, сохраняющее детерминант матрицы x. Тогда C записывается в виде $Cx = axb$ или в виде $Cx = ax^* b$, где a и b — матрицы с детерминантом 1, а x^* обозначает транспонированную матрицу.

Б. Пусть R — простая алгебра Ли. Для того чтобы линейное преобразование C, действующее в R, имело вид λT, где T — автоморфизм R, а λ — комплексное число, необходимо и достаточно, чтобы: а) C переводило коммутирующие элементы в коммутирующие, или чтобы: б) C переводило нильпотентный элемент в нильпотентный и т. п.

В. Пусть R — совокупность форм $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ степени k от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для того чтобы линейное преобразование C, действующее в R, индуцировалось некоторой линейной заменой переменных $\left(\text{т. е. } Cf(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n), \text{ где } x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)$, необходимо и достаточно, чтобы C переводило невырожденную форму в невырожденную.

Поступило
7 III 1951

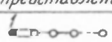
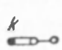
ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, ДАН, 75, № 3 (1950). [2] А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., 8, 143 (1944). [3] Е. Б. Дынкин, ДАН, 71, № 2 (1950). [4] Е. Б. Дынкин, ДАН, 76, № 5 (1951). [5] Е. Б. Дынкин, ДАН, 73, № 5 (1950).

ПОПРАВКА

Воспользуемся случаем для того, чтобы исправить ошибки, вкравшиеся в ([1]) и ([5]). В ([1]), табл. 3:

Напечатано — Должно быть

Подгруппа	Группа	Старш. вес соотв. представления	Подгруппа	Группа	Старш. вес соотв. представления
B_{2k+1}	$D_{2\cdot 2k+1}$ для нечетн. k		B_{2n+1}	B_m, если $N = 2m+1$	
	$C_{2\cdot 2k+1}$ для четного k			D_m, если $N = 2m$, $k(n+1)$ четно	
B_3	D_m, если $C^7_{k+7} = 2m$			C_m, если $N = 2m$, $k(n+1)$ нечетно	
	B_m, если $C^7_{k+7} = 2m+1$			$\left(N = \prod_{s=1}^{2n} \frac{\binom{k+2s-1}{k}}{\binom{k+s}{k}}\right)$	

В табл. 5 пропущена подгруппа типа B_2 в группе E_8 с характеристическим представлением, задаваемым старшими весами $6\Pi_1$, $2\Pi_1 + 3\Pi_2$ (в обозначениях Картана).

На стр. 335 строка 15 снизу вместо «задача а)» ошибочно напечатано «задача б)».

В формулировке теоремы 4 (стр. 336) вместо слов «с точностью до сопряженности» следует читать «с точностью до автоморфизмов группы».

В ([5]) в табл. 5 в группе E_8 указаны под номерами 6 и 7 подгруппы типа $D_5 \cdot A_3$ и E_8, должны быть, соответственно, $A_2 \cdot A_2 \cdot A_2 \cdot A_2$ и $A_2 \cdot E_6$.

На стр. 880 строка 2 сверху после слов «пространства R^m» пропущены слова «и имеют в каждом из них след нуль».

В формулировке теоремы 5 (стр. 880) вместо «ненулевом» следует читать «точном».