Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 6

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ТИМАН

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА, ОБЫКНОВЕННЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 II 1951)

В этом сообщении формулируются некоторые результаты о приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, обыкновенными многочленами.

Пусть, как это принято, $H^{(\alpha)}M$ обозначает класс функций $f(x)$, заданных на $[-1, 1]$ и удовлетворяющих там условию Липшица степени α с константой M, т. е. условию

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant M|x_1-x_2|^\alpha \tag{1}$$

для любых двух точек $x_1, x_2 \in [-1, 1]$.

Пусть далее

$$\hat{T}_0(x)=\sqrt{\frac{1}{\pi}}, \quad \hat{T}_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos k \arccos x, \quad k=1, 2, 3, \ldots,$$

есть ортонормированная с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на $[-1, 1]$ система полиномов П. Л. Чебышева и

$$c_k=\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\hat{T}_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

коэффициенты Фурье по этой системе.

Обозначим через $S_n(f; x)$ частную сумму порядка n ряда Фурье — Чебышева функции $f(x)$, т. е.

$$S_n(f; x)=\sum_{k=0}^{n}c_k\hat{T}_k(x).$$

Справедливо следующее утверждение, дающее для каждого x асимптотическую оценку величины

$$\mathscr{E}_{S_n}^{(\alpha)}(x)=\sup_{f\in H^{(\alpha)}M}|f(x)-S_n(f; x)|.$$

Теорема 1. *Для любого* $0<\alpha\leqslant 1$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$\mathscr{E}_{S_n}^{(\alpha)}(x)=\frac{2^{\alpha+1}M(1-x^2)^{\alpha/2}}{\pi^2}\frac{\ln n}{n}\int_0^{\pi/2}t^\alpha\sin t\,dt+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \tag{2}$$

равномерно относительно x *на сегменте* $[-1, 1]$.

При $\alpha = 1$ этот результат был ранее получен С. М. Никольским ([1]), доказательство которого основано на том обстоятельстве, что класс функций, удовлетворяющих на $[-1, 1]$ условию $Lip\,1$, совпадает с классом функций, являющихся неопределенными интегралами от своей производной, представимой в виде произведения функции $\sin t$ на измеримую, ограниченную и четную периода 2π функцию. В общем случае появляются некоторые затруднения, которые мы преодолеваем, пользуясь в известной мере методом, применявшимся нами ранее в работе ([2]).

Пусть теперь

$$\sigma_n(f;\ x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;\ x). \tag{3}$$

Следующая теорема дает для каждого x асимптотическую оценку величины

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}^{(\alpha)}(x) = \sup_{f \in H^{(\alpha)}M} |f(x) - \sigma_n(f;\ x)| \tag{4}$$

и указывает на одно любопытное разделение классов функций, удовлетворяющих условию $Lip\,\alpha$, связанное с поведением соответствующего приближения на концах рассматриваемого промежутка.

Теорема 2. *Для любого* $0 < \alpha \leqslant 1$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}^{(\alpha)}(x) = \frac{2M\Gamma(\alpha)}{\pi(1-\alpha)}\sin\frac{\alpha\pi}{2}\,\frac{(1-x^2)^{\alpha/2}}{n^\alpha} + o\left[\frac{(1-x^2)^{\alpha/2}}{n^\alpha}\right] + \delta_n^{(\alpha)}(x), \tag{5}$$

если $0 < \alpha < 1$, *и*

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}^{(\alpha)}(x) = \frac{2M}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,\frac{\ln n}{n} + O\left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right] + \delta_n^{(1)}(x), \tag{6}$$

если $\alpha = 1$, *равномерное относительно* $x \in [-1, 1]$, *где при* $|x| \leqslant 1$

$$\delta_n^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} O\left(\dfrac{|x|^\alpha}{n^{2\alpha}}\right), & \text{если } 0 < \alpha < 1/2, \\ O\left(\dfrac{\ln n}{n}\sqrt{|x|}\right), & \text{если } \alpha = 1/2, \\ O\left(\dfrac{|x|^\alpha}{n}\right), & \text{если } \alpha > 1/2. \end{cases} \tag{7}$$

При этом

$$\delta_n^{(\alpha)}(\pm 1) = \begin{cases} \dfrac{2^{\alpha-1}M\Gamma(2\alpha)\sin\alpha\pi}{(1-2\alpha)\pi n^{2\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right), & \text{если } 0 < \alpha < 1/2, \\ \dfrac{M\sqrt{2}}{\pi}\,\dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{M\sqrt{2}\,(C + 2\ln 2)}{\pi n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right), & \text{если } \alpha = 1/2, \\ \dfrac{2^\alpha M}{n\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\sin t)^{2\alpha-2}\,dt + \gamma_n^{(\alpha)}, & \text{если } \alpha > 1/2, \end{cases} \tag{8}$$

где $\gamma_n^{(\alpha)} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\gamma_n^{(1)} = 0$ *и* C — *известная константа Эйлера.*

Следствие 1. *Для любой функции $f(x) \in H^{(1)}M$ и для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ имеет место неравенство*

$$|f(\pm 1) - \sigma_n(f;\ \pm 1)| \leqslant \frac{M}{n}. \tag{9}$$

Неравенство (9) *точно.*

В случае приближения многочленами $\sigma_n(f;\ x)$, когда $\alpha = 1$, мы даем также для любых x и n точное значение рассматриваемой верхней грани и доказываем следующее предложение.

Теорема 3. *Для каждого $x \in [-1, 1]$ и любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ справедливо точное равенство*

$$\frac{1}{M}\mathscr{E}^{(1)}_{\sigma_n}(x) = \sqrt{1-x^2}\, R_{2n-2}(x) + \frac{x}{n\pi}(\pi - 2\arccos x), \tag{10}$$

где R_{2n-2} есть обыкновенный многочлен $(2n-2)$-го порядка вида

$$R_{2n-2}(x) = \frac{2}{n\pi}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}[1 - T_{2k}(x)] + \frac{1}{n^2}T'_n(x)\, T_{n-1}(x)\right\},$$

а $T_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ — полином П. Л. Чебышева, наименее уклоняющийся от нуля на $[-1, 1]$. При любом $x \in [-1, 1]$ существует функция, для которой $|f(x) - \sigma_n(f;\ x)|$ равно правой части равенства (10).

Из теоремы 3, кроме отмеченного уже следствия 1, вытекает

Следствие 2. *В центре сегмента $[-1, 1]$ для любой функции $f(x) \in H^{(1)}M$ и для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ имеет место неравенство*

$$\frac{1}{M}|f(0) - \sigma_n(f;\ 0)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1+(-1)^{k+1}}{k}, & \text{если } n \text{ четно},\\[2ex] \dfrac{2}{n\pi}\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1+(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{n}\right\}, & \text{если } n \text{ нечетно}. \end{cases} \tag{11}$$

Неравенство (11) *точно.*

Теорема 4. *Если $f(x) \in H^{(\alpha)}M$, то существует константа C, не зависящая от x и n, такая, что для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ найдется обыкновенный многочлен $P_n(x)$ степени не выше, чем n, удовлетворяющий неравенству*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{CM}{n^\alpha}\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)^\alpha + \left(\frac{|x|}{n}\right)^\alpha\right]. \tag{12}$$

Это предложение представляет собой усиление известной теоремы Джексона и подтверждает одну гипотезу, высказанную С. М. Никольским.

Следует отметить, что при $0 \leqslant \alpha < 1/2$ оно вытекает из приведенной нами выше теоремы 2.

Теорема 4 существенным образом уточняет теорему Джексона и имеет глубокую связь с одним аналогичным свойством производной обыкновенного многочлена, отмеченным С. Н. Бернштейном в его известной монографии ([3], стр. 57) в связи с рассмотрением неравенств типа В. А. Маркова*.

Заметим также, что явление, обнаруженное здесь, тесно связано с известным предложением С. Н. Бернштейна, в силу которого для

---

* На это обратил внимание автора С. М. Никольский.

приближений обыкновенными миогочленами на конечном промежутке теорема Джексона не допускает полного обращения.

В заключение заметим, что аналогичное усиление теоремы Джексона имеет место также и для функций, у которых существует r-я ($r \geqslant 0$) производная, удовлетворяющая условию Липшица степени α ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$).

Поступило
8 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., **10**, 295 (1946). [2] А. Ф. Тиман, ДАН, **61**, № 6 (1948). [3] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, Л.— М., 1937.