Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 6

МАТЕМАТИКА

Е. Я. РЕМЕЗ

О ЧЕБЫШЕВСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 21 II 1951)

1°. Постановка задачи. Существование решений. Применяя к комплексной области общую схему постановки чебышевской задачи, ранее формулированную нами для действительной области [1], рассмотрим систему несовместных линейных уравнений — конечную или бесконечную (вообще неисчислимую)

$$f(z) \equiv a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n = l \quad ((a_1, \ldots, a_n, l) \equiv Q \in G), \tag{1}$$

где G — заданное ограниченное точечное множество в унитарном пространстве [2] $(n+1)$-членных комплексно-числовых строк $\mathfrak{R}_{n+1}$, а $z_1, \ldots, z_n$ обозначают неизвестные; $z \equiv (z_1, \ldots, z_n) = \{z_j\}$ — «точка» аналогичного пространства $\mathfrak{R}_n$. Обозначая через G^* замыкание G и через δ — уклонение, соответствующее точке Q, или, выражаясь иначе, уравнению Q,

$$l - f(z) \equiv l - (a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n) = \delta, \tag{2}$$

мы формулируем задачу наилучшего приближения:

$$\sup_{Q \in G} |\delta| = \max_{Q \in G^*} |\delta| = L = L(z) = \min. \tag{3}$$

Мы можем предположить ранг «матрицы» коэффициентов a_j $(j=1,\ldots,n)$ равным n, что означает линейную независимость $a_1, \ldots, a_n$ на G. В силу этого для искомых значений $\{z_j\}$ устанавливаются наперед некоторые границы (ср. [1], стр. 131, 141)

$$|z_j| \leqslant M_j \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

и легко доказывается существование решения $z_0 \equiv \{z_{j0}\}$ задачи (3) с $L(z_0) = \min L(z) = \rho$. Совокупность $\{z_0\}$ всех решений образует конвексное замкнутое множество $H_0 \subset \mathfrak{R}_n$; при $L(z) \to \rho$ точка z бесконечно приближается к H_0.

Условимся далее писать система (1^*) при замене G на G^* в (1).

2°. Лимитирующие системы уклонений: установление комплексного аналога теоремы Валле-Пуссена [3]. Пусть при некотором данном z уклонения δ_ν $(\nu = 1, \ldots, r)$ уравнений $Q_1, \ldots, Q_r$ системы (1^*) все отличны от 0. Мы скажем, что они образуют лимитирующую систему уклонений, если их модули не могут быть все уменьшены ни при каком выборе поправки $\Delta z = \{\Delta z_j\}$. Отсюда, конечно, a priori,

$$\min\{|\delta_1|, |\delta_2|, \ldots, |\delta_r|\} \leqslant \rho. \tag{5}$$

Обозначая через $f_\nu(z)$ левую часть уравнения Q_ν ($\nu=1,\ldots,r$), положим

$$\Delta f_\nu(z)=f_\nu(z+\Delta z)-f_\nu(z)=f_\nu(\Delta z)=f_\nu(\zeta)=\eta_\nu. \qquad (6)$$

Величины $\operatorname{Re}(\eta_\nu \operatorname{sgn}\overline{\delta}_\nu)$ ($\nu=1,\ldots,r$) не должны быть все положительными ни при каком выборе $\Delta z=\zeta$ — таков будет признак, аналогичный известному условию ([4–6]) для наилучшего приближения.

Значительно более удобную для фактического использования и нетривиальную формулировку дает следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы уклонения $\delta_1,\ldots,\delta_r$ составляли лимитирующую систему, необходимым и достаточным условием является существование между линейными формами $f_1(\zeta),\ldots,f_r(\zeta)$ линейной зависимости вида*

$$k_1 \operatorname{sgn}\overline{\delta}_1\cdot f_1(\zeta)+\ldots+k_r \operatorname{sgn}\overline{\delta}_r\cdot f_r(\zeta)\equiv 0 \quad (k_\nu\geqslant 0,\ \Sigma k_\nu^2>0). \qquad (7)$$

Доказательство. По сути ищется аналитическая формулировка условия несовместности неравенств $\operatorname{Re}(\eta_\nu \operatorname{sgn}\overline{\delta}_\nu)>0$. Полагая

$$\operatorname{sgn}\delta_\nu=\cos\alpha_\nu+i\sin\alpha_\nu,\quad \zeta_j=x_j+iy_j,\quad a_{j\nu}=p_{j\nu}+iq_{j\nu}, \qquad (8)$$

мы можем эти неравенства записать (при $\nu=1,\ldots,r$) в виде

$$F_\nu(x,y)\equiv\sum_{j=1}^{n}(p_{j\nu}\cos\alpha_\nu+q_{j\nu}\sin\alpha_\nu)\,x_j+\sum_{j=1}^{n}(p_{j\nu}\sin\alpha_\nu-q_{j\nu}\cos\alpha_\nu)\,y_j>0. \quad (9)$$

Необходимое и достаточное условие несовместности неравенств (9) заключается (ср. ([1]), стр. 133—136) в существовании между формами F_ν линейной зависимости вида

$$\sum_{\nu=1}^{r}k_\nu F_\nu(x,y)\equiv 0 \quad (k_\nu\geqslant 0,\ \sum k_\nu^2>0), \qquad (10)$$

которая притом всегда может быть сведена к аналогичной неприводимой линейной зависимости между некоторыми r' ($r'\leqslant r$) из форм $F_1,\ldots,F_r$. Термином «неприводимая» обозначаем линейную зависимость между действительными линейными формами в том случае, когда все $k_\nu\neq 0$ (в данном случае — все $k_\nu>0$) и когда между формами F_ν не существует никакой другой (уже независимо от знаков k_ν) линейной зависимости при меньшем числе членов; при этом, конечно, $r'\leqslant 2n+1$.

Тождество (10) приводит к системе $2n$ линейных уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{r}(p_{j\nu}\cos\alpha_\nu+q_{j\nu}\sin\alpha_\nu)\,k_\nu=0,\quad \sum_{\nu=1}^{r}(p_{j\nu}\sin\alpha_\nu-q_{j\nu}\cos\alpha_\nu)\,k_\nu=0, \quad (11)$$

где $j=1,\ldots,n$. Но если мы развернем тождество (7), то придем также к (11), что и завершает доказательство теоремы.

Из вышесказанного вытекает сходимость (7) к неприводимой (в смысле невозможности сократить число членов даже при допущении отрицательных k_ν) линейной зависимости того же вида.

3°. Аналог теоремы Чебышева — Маркова. Чебышевские подсистемы. На основе результатов 2° устанавливаются следующие две формулировки искомого аналога.

Теорема 2. *Для того чтобы система значений $\{z_j\}\equiv z$ давала решение задачи* (3), *необходимо и достаточно, чтобы система* (1*) *содержала хотя бы одну подсистему уравнений* Q_ν ($\nu=1,\ldots,r$), *для которых соответствующие формы* $f_\nu(\zeta)$ *связаны линейной зависимостью вида* (7) *при* $|\delta_\nu| \equiv |l_\nu - f_\nu(z)| = L(z)$.

Всякую подсистему $\{Q_\nu\}$ такого рода мы будем называть чебышевскою подсистемой (уравнений) при выполнении уточняющего условия $k_\nu > 0$ $(\nu = 1, \ldots, r)$. Она всегда сводима (быть может и неоднозначным образом) к неприводимой чебышевской подсистеме (применяя термин «неприводимая» в точном соответствии с обозначениями 2°). Отсюда следует теорема 2′.

Теорема 2′. *Каждое решение* $z = z_0$ *задачи* (3) *для системы* (1) — (1*) *является при том же значении* ρ *решением аналогичной задачи для некоторой неприводимой чебышевской подсистемы уравнений* $\{Q_\nu\}$ $(\nu = 1, \ldots, r;\ 1 \leqslant r \leqslant 2n+1$ *) *системы* (1*), *т. е. подсистемы уравнений, для которых* $f_\nu(\zeta)$ *связаны неприводимой линейной зависимостью* (7) *при* $\delta_\nu = \delta_{\nu 0} \equiv l_\nu - f_\nu(z_0)$, $|\delta_{\nu 0}| = \rho$.

4°. Задача наилучшего приближения для чебышевских подсистем. Три заключения. Пусть $\{Q_\nu\}$ $(\nu = 1, \ldots, r)$ — какая-нибудь чебышевская подсистема (3°), не обязательно неприводимая при $z = z_0$. Мы рассмотрим вопрос об определении всех решений задачи наилучшего приближения для самой системы уравнений $\{Q_\nu\}$, имея a priori одно решение z_0.

Из тождества (7) (с заменою в нем δ_ν на $\delta_{\nu 0} = l_\nu - f_\nu(z_0)$ и ζ на z при $k_\nu > 0$) имеем для произвольного z и соответствующих $\delta_\nu = l_\nu - f_\nu(z)$

$$\sum_{\nu=1}^{r} k_\nu \operatorname{sgn} \overline{\delta}_{\nu 0} \cdot \delta_\nu \equiv \sum_{\nu=1}^{r} k_\nu \operatorname{sgn} \overline{\delta}_{\nu 0} \cdot l_\nu = \text{const} = \rho \sum_{\nu=1}^{r} k_\nu \quad (k_\nu > 0). \tag{12}$$

Рассмотрим систему r линейных относительно $\{z_j\}$ уравнений

$$l_1 - f_1(z) = \rho \operatorname{sgn} \delta_{10} \equiv \delta_{10}, \ldots, \quad l_r - f_r(z) = \rho \operatorname{sgn} \delta_{r0} \equiv \delta_{r0}, \tag{13}$$

где последнее — следствие остальных в силу (12). Ей заведомо удовлетворяет $z = z_0$. Система имеет $\infty^{n-\varkappa}$ решений, где $\varkappa$ — ранг матрицы $\|a_{j\nu}\|$ $(\infty^{n-n} = 1$ при $\varkappa = n)$. Все они являются решениями задачи наилучшего приближения для системы $\{Q_\nu\}$, и других решений эта задача не имеет: при нарушении уравнений (13) неизбежно окажется (в силу (12)) $|\delta_\nu| > \rho$ хотя бы для одного из значений $\nu = 1, \ldots, r$.

Полученный результат приводит к следующим заключениям:

1) Совокупность всех решений чебышевской задачи для $\{Q_\nu\}$ находится в данном случае с помощью явных формул решения системы уравнений (13), когда известно одно решение $z = z_0$.

2) Определение чебышевской подсистемы не зависит от частного выбора решения $z = z_0$ задачи (3), так же как не зависят от него и соответствующие уклонения δ_ν, вполне определенные не только по модулю, но и по аргументу.

3) Решение задачи (3) наверное является единственным, если какая-либо чебышевская подсистема включает n уравнений с линейно независимыми $f_\nu(z)$.

5°. Элементарные подсистемы. Можно аналогично подойти к исследованию задачи наилучшего приближения без задания наперед какого-либо решения для произвольной подсистемы $\{Q_\nu\}$ $(\nu = 1, \ldots, r)$, где формы $f_\nu(z)$ связаны линейной зависимостью общего вида (без специальной «ориентации» комплексных коэффициентов как в (7))

$$c_1 f_1(z) + \ldots + c_r f_r(z) \equiv 0 \quad (c_\nu \neq 0). \tag{14}$$

---

* В частности, для задач типа классической полиномиальной $n + 1 \leqslant r \leqslant 2n + 1$.

В частности, мы назовем такую систему $\{Q_\nu\}$ элементарною, если формы $f_\nu(z)$ не связаны еще другой линейной зависимостью при меньшем числе членов.

Воспроизводя (12) и (13) с заменою k_ν на $|c_\nu|$, $\operatorname{sgn}\overline{\delta}_{\nu 0}$ на $\operatorname{sgn} c_\nu$, $\rho \operatorname{sgn} \delta_{\nu 0} \equiv \delta_{\nu 0}$ на $L' \operatorname{sgn}\overline{c}_\nu$, где $L' = \Sigma c_\nu l_\nu : \Sigma |c_\nu|$, мы в случае элементарной системы $\{Q_\nu\}$ опять получаем все решения чебышевской задачи для нее из уравнений, заменяющих (13); но в случае системы $\{Q_\nu\}$ неэлементарной эти уравнения, вообще, противоречивы.

Источник основных усложнений для задачи (3) в комплексной области заключается как раз в том, что здесь, в отличие от задачи в действительной области, неприводимые чебышевские подсистемы, вообще, не являются «элементарными».

6°. Приближения к решениям; лимитирующие и квази-лимитирующие системы уклонений. Допустим, что в некотором процессе последовательных приближений для задачи (3) получаются приближенные решения $z_1, z_2, \ldots, z_N, \ldots$; $L(z_N) \to \rho$ [7]. Пусть $\{Q_\nu\}$ $(\nu = 1, \ldots, r)$ — какая-нибудь неприводимая чебышевская подсистема уравнений системы (1*). В случае $r = 2n + 1$ (в известном смысле основном) уклонения $\delta_\nu = \delta_{\nu N}$ при больших N будут составлять лимитирующую систему (2°), доставляющую сколь угодно близкую нижнюю границу для ρ. Несколько иначе обстоит дело при $r < 2n + 1$: тут определяемые из некоторых $r - 1$ уравнений системы (11) значения $\widetilde{k}_\nu = \widetilde{k}_{\nu N} > h > 0$ при больших N будут, вообще, удовлетворять лишь близкому к (7) соотношению

$$\sum_{\nu=1}^{r} \widetilde{k}_{\nu N} \operatorname{sgn} \overline{\delta}_{\nu N} \cdot f_\nu(\zeta) = o(\|\zeta\|) = o(1) \tag{15}$$

($\|\zeta\|$ — норма поправки $\zeta = \Delta z$, ограниченная в силу (4)). Здесь уклонения $\delta_{\nu N}$ $(\nu = 1, \ldots, r)$ составляют квази-лимитирующую систему с обеспечением неравенства (5) лишь с точностью до (поддающейся оценке) бесконечно малой величины — еще один пункт различия по сравнению с задачей в действительной области.

Поступило
17 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Я. Ремез, Вид. УАН (1935). [2] А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, 1948. [3] C. de la Vallée-Poussin, Bull. Acad. Belg., No. 12 (1910). [4] C. de la Vallée-Poussin, ibid., 199 (1911). [5] А. Н. Колмогоров, Усп. матем. наук, 3 : 1 (1948). [6] L. Tonelli, Annali di Mat., 15, 113 (1908). [7] Е. Я. Ремез, Ювіл. збірник АН УРСР, 1 (1944).