Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 6

МАТЕМАТИКА

Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ

ТЕОРЕМА ПОНСЛЭ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 26 II 1951)

§ 1. Якоби дает геометрическую интерпретацию эйлеровского дифференциального уравнения. Он берет два круга O и O' (рис. 1) один внутри другого радиусов r и R с расстоянием между центрами $OO' = a$, далее проводит касательную PMP' к малому кругу до пересечения в точках P и P' с большим кругом O. Если положить $\smile AP / R = 2\varphi$, $\smile AP' / R = 2\varphi'$, то будем иметь

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\varphi'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi'}}, \quad k^2 = \frac{4Ra}{(R+a)^2 - r^2}, \tag{1}$$

или, беря якобиевскую форму вместо лежандровой,

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-k^2x'^2)}}, \quad x = \sin\varphi, \ x' = \sin\varphi'. \tag{2}$$

Зависимость между φ и φ' или x и x' дается частным интегралом уравнения Эйлера (1) или (2), которому можно придать форму

$$\cos\varphi\cos\varphi' + \sqrt{1-k^2\sin^2\mu}\,\sin\varphi\sin\varphi' = \cos\mu, \tag{3}$$

где μ — постоянная, определяемая из условия, что $\mu = 0$ при $\varphi' = 0$.

Как следствие отсюда выводится теорема Понслэ, состоящая в том, что если возможно описать один многоугольник около одного круга и вместе с тем вписать в другой круг, то многоугольников с таким свойством окажется бесконечное множество.

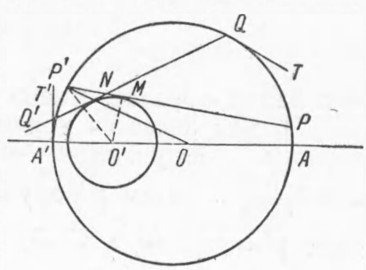

Рис. 1

§ 2. Я намерен показать, что уравнение Эйлера совершенно так же интерпретируется и на плоскости Лобачевского, причем безразлично, будут ли центры кругов реальны или идеальны, т. е. будем ли мы иметь дело с собственно кругами или гиперциклами.

Вместе с тем мы докажем, что в случае кругов теорема Понслэ остается в силе и на плоскости Лобачевского.

Мы начинаем с случая реальных центров (рис. 1). Обозначая через N точку пересечения бесконечно близких касательных, имеем $\operatorname{sh} QP / \operatorname{sh} PN = \sin PNQ / \sin NQP$, $\operatorname{sh} Q'P' / \operatorname{sh} P'N = \sin P'NQ / \sin NP'Q'$ и, деля почленно, $\operatorname{sh} QP / \operatorname{sh} Q'P' = \operatorname{sh} PN / \operatorname{sh} P'N = \sin NQP / \sin NQ'P$. Углы NQP и $NQ'P$ бесконечно мало отличаются от углов TQN и $T'Q'N$, образуемых касательными к кругу в точках Q и Q', причем $\angle T'Q'N = 180° - \angle TQN$, отсюда $\lim(\sin NQP / \sin NQ'P) = 1$. Таким образом, отбрасывая бесконечно малые высших порядков, получаем

$$d(2\varphi) / d(2\varphi') = \operatorname{sh} PN / \operatorname{sh} P'N. \tag{4}$$

Далее, замечаем, что PN и $P'N$ бесконечно мало отличаются от PM и $P'M$, где M — точка касания. Формулы же тригонометрии Лобачевского дают (полагая параметр $k=1$) $\operatorname{ch} PM = \operatorname{ch} O'M / \operatorname{ch} r$ и $\operatorname{ch} O'M = \operatorname{ch} R \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} R \operatorname{sh} a \cos 2\varphi$. Замечая же, что $\operatorname{sh}^2 PM = \operatorname{ch}^2 PM - 1$, мы получаем из (4)

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-(\varkappa-\varkappa'\cos^2\varphi)^2}} = \frac{d\varphi'}{\sqrt{1-(\varkappa-\varkappa'\cos^2\varphi')^2}}, \quad \varkappa = \frac{\operatorname{ch} R \cos a}{\operatorname{ch} r}, \ \varkappa' = \frac{\operatorname{sh} R \sin a}{\operatorname{ch} r}, \tag{5}$$

и, если положить $\varkappa - \varkappa'\cos^2\varphi = x$, то в якобиевой форме:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\left(\frac{x-\varkappa}{\varkappa'}\right)^2\right)}} = \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)\left(1-\left(\frac{x'-\varkappa}{\chi'}\right)^2\right)}}, \tag{6}$$

т. е. опять уравнение Эйлера.

§ 3. Зависимость между углами φ и φ' дается частным интегралом этого уравнения $\Omega(\varphi, \varphi', \mu) = 0$ или

$$H(x, x', x_0) = 0, \tag{7}$$

где Ω — алгебраическая функция $\sin\varphi$, $\sin\varphi'$, $\sin\mu$, а H — алгебраическая функция x, x', x_0. За μ следует принять значение φ, отвечающее $\varphi' = 0$.

В трансцендентной форме частный интеграл представляется так

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{R(\varphi)}} - \int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi}{\sqrt{R(\varphi)}} = \int_0^{\mu}\frac{d\varphi}{\sqrt{R(\varphi)}}, \tag{8}$$

или, в сокращенном обозначении:

$$\int_0^{\varphi} d\omega - \int_0^{\varphi'} d\omega = \int_0^{\mu} d\omega \quad \text{или} \quad \int_{\varphi'}^{\varphi} d\varphi = \int_0^{\mu} d\omega. \tag{9}$$

Для определения μ замечаем, что из $\triangle A'MO'$ $\sin\psi = \operatorname{sh} r / \operatorname{sh}(R-a)$, где $\psi = \angle MA'O' = \mu/2$, и, наконец,

$$\operatorname{tg}\frac{\mu}{2} = \frac{\operatorname{sh} r}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(R-a) - \operatorname{sh}^2 r}}. \tag{10}$$

Мы, таким образом, имеем выражение μ через a.

§ 4. Что касается уравнений (7), то в развернутом виде они очень сложны. Получаются они обычным приемом, полагая сперва $x = \frac{a+b\xi}{1+\xi}$. Затем в получаемом интеграле $\int\frac{d\xi}{\sqrt{(1+m\xi^2)(1+n\xi^2)}}$ полагаем $\sqrt{-m}\xi = z$, $\sqrt{-m}\xi' = z'$, что дает

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{dz'}{\sqrt{(1-z'^2)(1-k^2z'^2)}}$$

с частным интегралом

$$\frac{z\sqrt{R(z')} - z'\sqrt{R(z)}}{1-k^2z^2z'^2} = z_0, \quad R(z) = (1-z^2)(1-k^2z'^2). \tag{11}$$

§ 5. Для доказательства теоремы Понслэ следует только воспроизвести то, что делается на плоскости Евклида. Складывая равенства $\int_0^{\varphi_{l+1}} d\omega - \int_0^{\varphi_l} d\omega = \int_0^{\mu} d\omega$, почленно отвечающие различным сторонам впи-

ПОПРАВКА

В формулах (6), (12), (15), (16) вместо напечатанного в знаменателях χ, χ' должно быть всюду, соответственно: $\varkappa$, $\varkappa'$.

санного и описанного в отношении двух кругов O и O' многоугольников, мы получаем, как условие замыкания, многоугольник:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_1+p\pi} d\omega = (n-1)\int_0^{\mu} d\omega, \tag{12}$$

где n — число сторон многоугольника.

Но при $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_1 + p\pi$ $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left[1-\left(\frac{x-\varkappa}{\chi'}\right)^2\right]}}$ имеет значения, отличающиеся только на период, вследствие чего левая часть уравнения (12) не зависит от φ_1, представляя период этого интеграла. А отсюда следует, что построение многоугольника можно начинать с любого значения φ, т. е. таких многоугольников существует бесконечное множество.

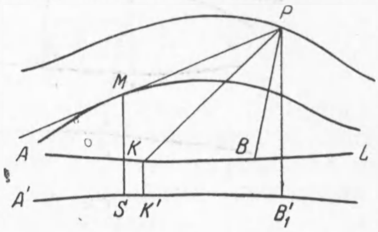

Рис. 2

§ 6. Переходим к случаю, когда оба центра O и O' идеальны. Условию того, что O' лежит внутри O, здесь будет отвечать требование, чтобы оси гиперциклов были сверхпараллельны, т. е. чтобы существовала прямая KK', перпендикулярная к обеим осям AB и AB' (рис. 2), причем положим $KK' = a$. Расстояние же точек гиперциклов от осей обозначим через r и R. Опуская из P перпендикуляры на обе оси $PB_1 = d$ и $MS = r$, мы из трипрямоугольника MPB_1S имеем $\operatorname{ch} MP = \operatorname{ch} t = \operatorname{sh} d / \operatorname{sh} r$, а затем из $\triangle KPB$

$$\operatorname{sh} R = \sin\varphi \operatorname{sh} l, \quad \text{где } \varphi = \angle PKL,\ f = KB,\ \operatorname{ch} f \operatorname{ch} R = \operatorname{ch} l,\ l = KP. \tag{13}$$

Из двупрямоугольника $KK'B'P$ получаем $\operatorname{sh} d = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} l - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} l \sin\varphi$, а в силу (13)

$$\operatorname{ch} t = \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} R \operatorname{ch} f - \operatorname{ch} a \operatorname{ch} R}{\operatorname{sh} R}. \tag{14}$$

Означая через P' другую точку пересечения MP с гиперциклом, получаем, полагая $KP' = t'$: $\operatorname{ch} t = \operatorname{ch} f \operatorname{ch} R$, $\operatorname{ch} t' = \operatorname{ch} f' \operatorname{ch} R$, $f = KB$, $f' = K'B'$, откуда дифференцированием, как в § 1, получаем

$$\frac{df}{df'} = \frac{\sqrt{(\operatorname{ch} a \operatorname{sh} R - \operatorname{sh} a \operatorname{ch} R \operatorname{ch} f)^2 - \operatorname{sh}^2 R}}{\sqrt{(\operatorname{ch} a \operatorname{sh} R - \operatorname{sh} a \operatorname{ch} R \operatorname{ch} f')^2 - \operatorname{sh}^2 R}},$$

откуда, окончательно:

$$\frac{df}{\sqrt{(\varkappa - \varkappa' \operatorname{ch} f)^2 - 1}} = \frac{df'}{\sqrt{(\chi - \chi' \operatorname{ch} f')^2 - 1}}, \tag{15}$$

откуда опять приходим к уравнению Эйлера.

§ 7. В трансцендентной форме

$$\int_0^f \frac{df}{\sqrt{(\chi - \varkappa' \operatorname{ch} f)^2 - 1}} - \int_0^{f'} \frac{df}{\sqrt{(\varkappa - \varkappa' \operatorname{ch} f')^2 - 1}} = \int_0^{\mu} \frac{df}{\sqrt{(\varkappa - \varkappa' \operatorname{ch} f)^2 - 1}}; \tag{16}$$

здесь μ представляет значение f, отвечающее $f' = 0$.

Для определения μ обращаемся к трипрямоугольнику $MKPB$ (рис. 3), в котором PBB_1 — перпендикуляр к обеим осям гиперциклов, из которого получаем $\sin P = \operatorname{ch} r / \operatorname{ch}(R-a)$.

Проводя через J — середину KB — перпендикуляр к KB, где MK — перпендикуляр к оси первого гиперцикла, мы получаем трипрямоугольник $PMKB$, причем $JB = \mu/2$. Из него получаем $\operatorname{tg} P = \frac{1}{\operatorname{ch} R \operatorname{sh} \mu/2} \frac{1}{\operatorname{th} JU}$. Имея в виду, что $\operatorname{th} JU = \frac{\operatorname{th} R}{\operatorname{ch} \mu/2}$, окончательно получаем

$$\operatorname{cth} \frac{\mu}{2} = \frac{\operatorname{ch} r}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 (R-a) - \operatorname{ch}^2 r}}. \tag{17}$$

§ 8. Конечно, в этом случае уже не будем иметь аналогов теоремы Понслэ. Мы можем только указать условие существования такого

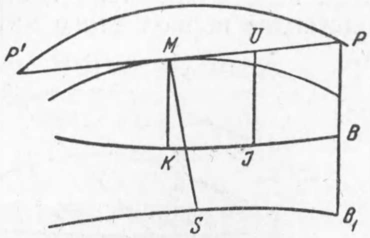

Рис. 3

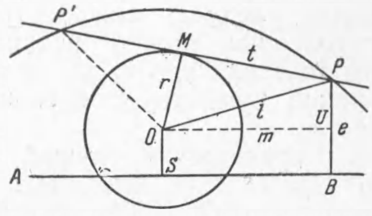

Рис. 4

многоугольника, который вписывается в один гиперцикл и описывается около другого так, что первая и последняя стороны оказываются параллельными оси первого гиперцикла.

Условие это выражается так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega = (n-1) \int_{0}^{\mu} d\omega. \tag{18}$$

§ 9. Наконец, переходим к случаю, когда имеем круг O и гиперцикл с осью AB (рис. 4). Из OMN имеем $\operatorname{ch} r = \operatorname{ch} l / \operatorname{ch} r$, $l = OP$ (точка P пересечения касательной с гиперциклом). Следует рассмотреть двупрямоугольник $SOPB$, где $OS \perp AB$ (оси гиперцикла), выражая одну сторону через другую: $\operatorname{ch} l = \operatorname{ch} m \operatorname{ch} \xi$, где $OU = m \perp PB$, а $\xi = UP = R - \eta$, $\eta = BU$,

$$\operatorname{ch} l = \operatorname{ch} m \operatorname{ch} (R - r) = \operatorname{ch} m (\operatorname{ch} R \operatorname{ch} \eta - \operatorname{sh} R \operatorname{sh} \eta). \tag{19}$$

Определяя $\operatorname{sh} \eta$ и $\operatorname{ch} \eta$ из трипрямоугольника $SOUB$ через a, m и $f = SB$ и подставляя получаемые значения в (19), получаем $\operatorname{ch} l = \operatorname{ch} R \operatorname{ch} f \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} l$, $\operatorname{ch} t = (\operatorname{ch} R \operatorname{ch} f \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a) / \operatorname{ch} R$; мы, как в § 6, опять выводим эйлеровское уравнение, связующее f и f'. Уравнение (18) будет опять условием существования многоугольника с крайними сторонами, параллельными оси гиперцикла.

§ 10. μ и здесь определяется из геометрических соображений, аналогичных § 7. Мы ограничиваемся только сообщением окончательного результата:

$$\operatorname{cth} \frac{\mu}{2} = \frac{\operatorname{sh} R \operatorname{sh} r}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 (R-a) - \operatorname{sh}^2 r}}. \tag{20}$$

Поступило
10 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Laurent, Traité d'Analyse, 14, ch. 7, p. 211. [2] Дарбу, Принципы аналитической геометрии, М., 1933, кн. III. [3] Д. Мордухай-Болтовской, In memoriam Lobatschewski, Казань, 1927.