Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 6

МАТЕМАТИКА

И. В. МАТВЕЕВ

О МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 II 1951)

Пусть (C) — пространство непрерывных функций периода 2π по x и по y. Ставится задача: каким условиям должна удовлетворять система чисел $\lambda_{kl}^{(mn)}$ для того, чтобы равномерно для всех точек (x, y) и для любой функции $f(x, y) \in (C)$

$$\lim_{m,\, n \to \infty} U_{mn}(f; x, y) = f(x, y), \tag{1}$$

где

$$U_{mn}(f; x, y) = \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \lambda_{k0}^{(mn)}(a_{k0}\cos kx + b_{k0}\sin kx) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \lambda_{0l}^{(mn)}(a_{0l}\cos ly + c_{0l}\sin ly) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \lambda_{kl}^{(mn)}(a_{kl}\cos kx\cos ly + b_{kl}\sin kx\cos ly +$$

$$+ c_{kl}\cos kx\sin ly + d_{kl}\sin kx\sin ly).$$

Здесь a_{kl}, b_{kl}, c_{kl}, d_{kl} — коэффициенты Фурье функции $f(x, y)$; $\lambda_{kl}^{(mn)}$ — система чисел, зависящая от k, l и m, n $(m, n = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots, m;\ l = 1, 2, \ldots n)$. В силу общих теорем функционального анализа условие (1) эквивалентно совокупности следующих двух условий:

$$\lim_{m,\, n \to \infty} \lambda_{kl}^{(mn)} = 1, \tag{A}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \lambda_{k0}^{(mn)}\cos kx + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \lambda_{0l}^{(mn)}\cos ly + \right. \tag{2}$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \lambda_{kl}^{(mn)}\cos kx\cos ly \right| dx\,dy \leqslant M; \tag{B}$$

M — постоянная.

Так как условие (A) вполне прозрачно, то задача сводится к нахождению ограничений, которым должны удовлетворять λ_{kl} (в дальнейшем ради краткости положим $\lambda_{kl}^{(mn)} = \lambda_{kl}$), чтобы выполнялось условие (B). Мы доказываем следующее предложение.

Теорема 1. *Если коэффициенты* λ_{kl} ($\lambda_{00} = 1$; $\lambda_{k,n+1} = \lambda_{m+1,l} = 0$) *удовлетворяют условиям*

1) $|\lambda_{kl}| \leqslant L$;

2) $\sum_{k=0}^{m-1}(m-k)\left(\sum_{i=m-k}^{m}\frac{1}{i}\right)|\Delta_{kk}^2\lambda_{ks}| \leqslant L, \quad \sum_{l=0}^{n-1}(n-l)\left(\sum_{j=n-l}^{n}\frac{1}{j}\right)|\Delta_{ll}^2\lambda_{r,l}| \leqslant L$;

3) $\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1}(m-k)(n-l)\left(\sum_{i=m-k}^{m}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{j=n-l}^{n}\frac{1}{j}\right)|\Delta_{kkll}^4\lambda_{kl}| \leqslant L$

$$(r = 0, 1, \ldots, m;\ \ s = 0, 1, \ldots, n),$$

где L — *постоянная, то условие* (B) *имеет место.*

Здесь $\Delta_{kk}^2\lambda_{ks} = \lambda_{kl} - 2\lambda_{k+1,l} + \lambda_{k-1,l}$, $\Delta_{ll}^2\lambda_{rl} = \lambda_{rl} = 2\lambda_{r,l+1} + \lambda_{r,l+2}$, $\Delta_{kkll}^4\lambda_{kl} = \Delta_{kk}^2(\Delta_{ll}^2\lambda_{kl}) = \Delta_{ll}^2\lambda_{kl} - 2\Delta_{ll}^2\lambda_{k+1,l} + \Delta_{ll}^2\lambda_{k+2,l}$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1;$ $l = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Для доказательства к подинтегральному выражению (ядру) условия (B), которое мы обозначим через $K_{mn}(x, y)$, применим преобразование Абеля.

Тогда получим:

$$K_{mn}(x, y) = \sum_{k=0}^{\mu-1}\sum_{l=0}^{\nu-1}\Delta_{kl}^2\lambda_{kl}D_{kl}(x, y) + \sum_{k=\mu}^{m}\sum_{l=0}^{\nu-1}\Delta_{kl}^2\lambda_{kl}D_{kl}(x, y) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\mu-1}\sum_{l=\nu}^{n}\Delta_{kl}^2\lambda_{kl}D_{kl}(x, y) + \sum_{k=\mu}^{m}\sum_{l=\nu}^{n}\Delta_{kl}^2\lambda_{kl}D_{kl}(x, y), \tag{3}$$

где μ и ν выбраны так, что $\mu = [m/2]$, $\nu = [n/2]$; $D_{kl}(x, y) = D_k(x)\,D_l(y)$ ($D_k(x)$, $D_l(y)$ — ядра Дирихле), а $\Delta_{kl}^2\lambda_{kl} = \lambda_{kl} - \lambda_{k+1,l} - \lambda_{k,l+1} + \lambda_{k+1,l+1}$.

Если мы покажем, что двойные интегралы от 0 до 2π по каждому переменному x, y от модуля каждой суммы правой части соотношения (3) ограничены, то теорема тем самым будет доказана.

При доказательстве мы опираемся на два рассмотренных нами неравенства:

$$(k+1) \leqslant C(m-k)\sum_{i=m-k}^{m}\frac{1}{i} \quad \left(k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{m}{2}\right]\right), \tag{4}$$

$$\int_0^{2\pi}|K_{k+1}(x)|\,dx \leqslant C\sum_{i=m-k}^{m}\frac{1}{i} \quad \left(\left[\frac{m}{2}\right] \leqslant k \leqslant m-1\right), \tag{5}$$

C — постоянная, $K_{k+1}(x) = \dfrac{D_{k+1}(x) + D_{k+2}(x) + \cdots + D_m(x)}{m-k}$.

Для оценки интеграла от первой суммы соотношения (3) воспользуемся преобразованием Абеля.

Тогда получим:

$$\sum_{k=0}^{\mu-1}\sum_{l=0}^{\nu-1}\Delta_{kl}^2\lambda_{kl}D_{kl}(x,y)=\sum_{k=0}^{\mu-2}\sum_{l=0}^{\nu-2}(l+1)(k+1)\Delta_{kkll}^4\lambda_{kl}F_{kl}(x,y)+$$
$$+\sum_{k=0}^{\mu-2}\nu(k+1)\Delta_{kkl}^3\lambda_{k,\nu-1}F_{k,\nu-1}(x,y)+$$
$$+\sum_{l=0}^{\nu-2}\mu(l+1)\Delta_{kll}^3\lambda_{\mu-1,l}F_{\mu-1,l}(x,y)+\Delta_{kl}^2\lambda_{\mu-1,\nu-1}F_{\mu-1,\nu-1}(x,y), \qquad (6)$$

где $F_{kl}(x,y)=F_k(x)F_l(y)$, а $F_k(x)$ и $F_l(y)$ — ядра Фейера.

В силу тождества $\int\limits_0^{2\pi}F_k(x)\,dx=\pi$ и неравенства (4) непосредственно получаем ограниченность интеграла от модуля двойной суммы правой части соотношения (6). Для оценки интеграла от второй (аналогично от третьей) суммы (6) применим, соответственно, тождества:

$$\begin{aligned}(n-\nu+2)\Delta_{kkl}^3\lambda_{k,\nu-1}&=\Delta_{kk}^2\lambda_{k,\nu-1}+\sum_{l=\nu}^{n}(n-l+1)\Delta_{kkll}^4\lambda_{k,l-1},\\(m-\mu+2)\Delta_{kll}^3\lambda_{\mu-1,l}&=\Delta_{ll}^2\lambda_{\mu-1,l}+\sum_{k=\mu}^{m}(m-k+1)\Delta_{kkll}^4\lambda_{k-1,l}.\end{aligned}\qquad(7)$$

Принимая еще во внимание, что $\nu=[n/2]$, получим:

$$\sum_{k=0}^{\mu-2}\nu(k+1)\,|\Delta_{kkl}^3\lambda_{k,\nu-1}|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{\mu-2}(k+1)\,|\Delta_{kk}^2\lambda_{k,\nu-1}|+\sum_{k=0}^{\mu-2}\sum_{l=\nu}^{n}(k+1)(n-l+1)\,|\Delta_{kkll}^4\lambda_{k,l-1}|. \qquad (8)$$

В силу неравенства (4) и условий теоремы правая часть неравенства (8) ограничена, что эквивалентно ограниченности интеграла от модуля второй суммы соотношения (6). Пользуясь тождествами (7) и

$$\begin{aligned}(m-\mu+2)\Delta_{kl}^2\lambda_{\mu-1,\nu-1}&=\Delta_l\lambda_{\mu-1,\nu-1}+\sum_{k=\mu-1}^{m-1}(m-k)\Delta_{kkl}^3\lambda_{k,\nu-1},\\(n-\nu+2)\Delta_l\lambda_{\mu-1,\nu-1}&=\lambda_{\mu-1,\nu-1}+\sum_{l=\nu-1}^{n-1}(n-l)\Delta_{ll}^2\lambda_{\mu-1,l},\end{aligned}\qquad(9)$$

а также принимая во внимание, что $\nu=[n/2]$, $\mu=[m/2]$, получим ограниченность интеграла

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\Delta_{kl}^2\lambda_{\mu-1,\nu-1}|\,F_{\mu-1,\nu-1}(x,y)\,dx\,dy.$$

Для оценки интеграла от модуля второй (аналогично третьей) суммы соотношения (3) применим к последней по индексу l преобразование Абеля, а по индексу k воспользуемся соотношением

$$D_k(x)=(m-k+1)K_k(x)-(m-k)K_{k+1}(x) \qquad (10)$$

(см. неравенство (5)). Принимая затем во внимание тождества (7), а также условия $\mu = [m/2]$, $\nu = [n/2]$ и пользуясь неравенствами (5) и (4), получим ограниченность интеграла от модуля второй суммы соотношения (3).

Для оценки интеграла от модуля последней суммы правой части равенства (3) преобразуем последнюю с помощью соотношения (10) как по индексу l, так и по индексу k. Принимая затем во внимание тождества (7) и (9) и пользуясь неравенством (5), получим ограниченность интеграла от модуля последней суммы соотношения (3).

Теорема, таким образом, доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы выполнялось условие* (В), *необходимо, чтобы имели место неравенства*:

1) $|\lambda_{kl}| \leqslant C$;

2) $\left|\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_{m-k+1,\nu}}{k}\right| \leqslant C, \quad \left|\sum_{l=1}^{n} \frac{\lambda_{\mu, n-l+1}}{l}\right| \leqslant C$;

3) $\left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \frac{\lambda_{m-k+1, n-l+1}}{kl}\right| \leqslant C$; $\quad C$ — *постоянная*, $\quad \mu = 0, 1, \ldots, m$; $\nu = 0, 1, \ldots, n$.

Доказательство проводится тем же методом, каким доказывается аналогичная теорема С. М. Никольского для функций от одной переменной [2].

Теорема 3. *Если* $\Delta^2_{kk}\lambda_{ks}$, $\Delta^2_{ll}\lambda_{rl}$, $\Delta^4_{kkll}\lambda_{kl}$ $(s = 0, 1, \ldots, n;\ r = 0, 1, \ldots, m)$ *знакопостоянны, то условия теоремы* 2 *являются не только необходимыми, но и достаточными для выполнения условия* (В).

Справедливость теоремы будет следовать из ограниченности сумм, фигурирующих в условиях теоремы 1, некоторой константой C.

Оценка, например, суммы 3) (см. условие теоремы 1) имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1}(m-k)(n-l)\Big(\sum_{i=m-k}^{m}\frac{1}{i}\Big)\Big(\sum_{j=n-l}^{n}\frac{1}{j}\Big)|\Delta^4_{kkll}\lambda_{kl}| =$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1}(m-k)(n-l)\Big(\sum_{i=m-k}^{m}\frac{1}{i}\Big)\Big(\sum_{j=n-l}^{n}\frac{1}{j}\Big)\Delta^4_{kkll}\lambda_{kl}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_{0, n-j+1}}{j}\right| + \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_{m, n-j+1}}{j}\right| + \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_{m-i+1, n-j+1}}{ij}\right|.$$

Аналогично оцениваются и другие суммы.

Рассмотренная задача была поставлена передо мною С. М. Никольским и является обобщением (на случай непрерывных функций от двух переменных) результатов С. М. Никольского [1, 2] и B. Nagy [3], относящихся к суммированию рядов Фурье для функций от одной независимой переменной.

В заключение выражаю благодарность С. М. Никольскому за руководство и помощь в работе.

Поступило
28 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, Реферат н.-и. работ 1943—1944 г. отд. физ.-матем. наук АН СССР. [2] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., **12**, 259 (1948). [3] B. Nagy, Acta Sci. math., **12**, pars b, Szeged, 204 (1950).