Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 6

МАТЕМАТИКА

А. МАРКОВ

НЕВОЗМОЖНОСТЬ АЛГОРИФМОВ РАСПОЗНАВАНИЯ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ АССОЦИАТИВНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 23 II 1951)

1. Когда наша предыдущая заметка (3) уже была сдана в печать, нам удалось получить одну весьма общую теорему неразрешимости, из которой опубликованные результаты непосредственно получаются как частные случаи. Настоящая заметка в основном посвящена установлению этой теоремы.

2. Будем называть K-*системой* ассоциативную систему, определяемую конечной системой соотношений в каком-нибудь алфавите (1).

3. Будем говорить об ассоциативной системе, что она *единичная*, если она состоит только из своей единицы. Единичная ассоциативная система есть K-система.

4. Пусть n — натуральное число. Мы говорим о K-системе S, что она *определима* в n буквах в следующих двух случаях: во-первых, когда $n>0$ и S определяется конечной системой соотношений в алфавите из n букв; во-вторых, когда $n=0$ и S есть единичная ассоциативная система.

5. Мы говорим об ассоциативной системе S, что она *включаема* в ассоциативную систему T, если T содержит подсистему*, изоморфную S.

6. Нас будут интересовать различные свойства, встречающиеся у K-систем (коротко — «свойства K-систем»), такие, например, как единичность, конечность, включаемость в группу, как свойство быть группой, быть полугруппой.

Мы говорим о свойстве $\mathfrak{P}$ K-систем, что оно *инвариантно*, если всякая K-система, изоморфная какой-нибудь K-системе со свойством $\mathfrak{P}$, сама обладает этим свойством. Все пять вышеперечисленных свойств K-систем, очевидно, инвариантны.

7. Мы говорим о свойстве $\mathfrak{P}$ K-систем, что оно *наследственно*, если всякая K-система, включаемая в какую-нибудь K-систему со свойством $\mathfrak{P}$, сама обладает этим свойством. Всякое наследственное свойство K-систем, очевидно, инвариантно. Единичность, конечность, включаемость в группу и свойство быть полугруппой наследственны, тогда как свойство быть группой не наследственно.

8. Всякая конечная система соотношений в каком-нибудь алфавите однозначно с точностью до изоморфии определяет некоторую K-систему. Если $\mathfrak{P}$ — инвариантное свойство K-систем, то в связи со всякой

* Хотя все рассматриваемые нами ассоциативные системы имеют единицы (1), вполне может случиться, что единица подсистемы системы T не совпадает с единицей системы T. Это надо иметь в виду в дальнейшем.

конечной системой соотношений $\mathfrak{R}$ в алфавите A возникает вопрос, обладает ли этим свойством K-система, определяемая системой $\mathfrak{R}$. Естественно также для всякого данного алфавита A поставить следующую проблему.

Указать алгорифм, посредством которого можно было бы для любой конечной системы соотношений в A указывать, обладает ли свойством $\mathfrak{P}$ определяемая ею K-система.

Эту проблему мы будем называть **проблемой распознавания свойства $\mathfrak{P}$ для алфавита A**. Термин «алгорифм» мы будем при этом понимать в том же смысле, как в наших предыдущих заметках ([1-3]).

9. Имеет место следующая общая теорема невозможности.

Пусть $\mathfrak{P}$ — инвариантное свойство K-систем. Если существуют как K-система с этим свойством, так и K-система, не включаемая ни в какую K-систему с этим свойством, то существует алфавит, для которого проблема распознавания свойства $\mathfrak{P}$ неразрешима (в том смысле, что искомый в этой проблеме алгорифм невозможен). Если при этом имеется K-система со свойством $\mathfrak{P}$, определимая в n буквах, то для всякого алфавита с числом букв, большем или равном $n+4$, проблема распознавания свойств $\mathfrak{P}$ неразрешима.

Мы приведем здесь эскиз доказательства этой теоремы.

10. Введем прежде всего следующую терминологию.

О соотношении будем говорить, что оно **регулярно**, если обе его части не пусты. О системе соотношений будем говорить, что она **регулярна**, если все ее соотношения регулярны. О K-системе будем говорить, что она **регулярно определима**, если существует определяющая ее регулярная система соотношений.

11. Легко доказываются следующие леммы.

Лемма 1. *Всякая K-система включаема в регулярно определимую K-систему.*

Лемма 2. *Всякая регулярно определимая K-система включаема в K-систему, определимую в двух буквах.*

Из них вытекает, что всякая K-система включаема в K-систему, определимую в двух буквах.

12. Пусть теперь S_0 K-система, не включаемая ни в какую K-систему со свойством $\mathfrak{P}$. Такая K-система существует, согласно условию теоремы. Пусть она определяется системой соотношений $\mathfrak{R}_0$ в алфавите B_0.

Как известно, существуют K-системы с неразрешимой проблемой тождества ([1,2,4]). Пусть S_1 является такой K-системой и пусть S_1 определяется системой соотношений $\mathfrak{R}_1$ в алфавите B_1. Этот алфавит мы выберем так, чтобы он не имел общих букв с B_0, что, очевидно, возможно.

Объединение алфавитов B_0 и B_1 обозначим через B_2; объединение систем соотношений $\mathfrak{R}_0$ и $\mathfrak{R}_1$ — через $\mathfrak{R}_2$. $\mathfrak{R}_2$ есть система соотношений в алфавите B_2 и, как таковая, определяет некоторую K-систему S_2 (являющуюся ничем иным, как свободным произведением систем S_0 и S_1).

Нетрудно видеть, что S_0 включаема в S_2. Поэтому S_2 не включаема ни в какую K-систему со свойством $\mathfrak{P}$. Нетрудно также видеть, что для S_2, как и для S_1, неразрешима проблема тождества.

Согласно доказанному, S_2 включаема в K-систему S_3, определяемую некоторой системой соотношений $\mathfrak{R}_3$ в алфавите $\{a, b\}$. S_3, как и S_2, не включаема ни в какую K-систему со свойством $\mathfrak{P}$. Для S_3, как и для S_2, неразрешима проблема тождества.

13. Пусть далее S_4 K-система со свойством $\mathfrak{P}$, определимая в n буквах. Такая K-система существует, согласно условию теоремы.

Пусть при $n > 0$ S_4 определяется системой соотношений $\mathfrak{R}_4$ в алфавите B_4. Выберем этот алфавит так, чтобы в него не входили буквы a, b, c, d, что, очевидно, возможно.

При $n > 0$ обозначим через B_5 алфавит, получаемый из B_4 присоединением букв a, b, c, d. При $n = 0$ обозначим через B_4 алфавит $\{a, b, c, d\}$. B_5 всегда состоит из $(n+4)$ букв.

Пусть G и H — какие-нибудь слова в алфавите $\{a, b\}$. Построим систему соотношений $\mathfrak{R}_{G,H}$ в B_5 следующим образом. При $n > 0$ объединим системы соотношений $\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{R}_4$ и систему пяти соотношений

$$cGd \longleftrightarrow 0; \qquad \xi cHd \longleftrightarrow cHd \quad (\xi = a, b, c, d); \tag{1}$$

при $n = 0$ объединим $\mathfrak{R}_3$ с системой соотношений (1).

Обозначим через $S_{G,H}$ K-систему, определяемую системой $\mathfrak{R}_{G,H}$ в алфавите B_5.

Могут быть установлены следующие леммы.

Лемма 3. *Если соотношение*

$$G \longleftrightarrow H \tag{2}$$

следует из $\mathfrak{R}_3$, то $S_{G,H}$ изоморфна S_4.

Лемма 4. *Если соотношение* (2) *не следует из $\mathfrak{R}_3$, то для любых двух слов P и Q в алфавите $\{a, b\}$ соотношение $P \longleftrightarrow Q$ тогда и только тогда следует из $\mathfrak{R}_{G,H}$, когда оно следует из $\mathfrak{R}_3$.*

Из леммы 4 следует, что в случае, когда (2) не есть следствие из $\mathfrak{R}_3$, S_3 включаема в $S_{G,H}$. Принимая во внимание свойства K-систем S_3 и S_4, заключаем отсюда и из леммы 3, что $S_{G,H}$ обладает свойством $\mathfrak{P}$, если (2) следует из $\mathfrak{R}_3$, и не обладает этим свойством, если (2) не следует из $\mathfrak{R}_3$. Поэтому решение проблемы распознавания свойства $\mathfrak{P}$ для алфавита B_5 влекло бы за собою решение проблемы тождества для S_3, которое, однако, невозможно. Следовательно, решение проблемы распознавания свойства $\mathfrak{P}$ для $(n+4)$-буквенного алфавита B_5 невозможно. Переход к произвольному алфавиту, содержащему не менее $(n+4)$ букв, очевиден.

14. В применении к наследственным свойствам наша теорема может быть упрощена. В самом деле, если свойство $\mathfrak{P}$ наследственно, то K-система, не обладающая этим свойством, не включаема ни в какую K-систему с этим свойством. С другой стороны, в этом случае существование K-системы со свойством $\mathfrak{P}$ влечет наличие этого свойства у единичной K-системы, которая ведь включаема во всякую K-систему. Принимая все это во внимание, получаем, как следствие из доказанной теоремы, следующий результат.

Пусть $\mathfrak{P}$ — наследственное свойство K-систем. Если существуют как K-система с этим свойством, так и K-система без этого свойства, то для всякого алфавита с числом букв, большим и равным 4, проблема распознавания свойств $\mathfrak{P}$ неразрешима.

15. Применение последнего результата к наследственным свойствам единичности, включаемости в группу и к свойству быть полугруппой непосредственно дает результаты нашей предыдущей заметки, касающиеся этих свойств. Его применение к наследственному свойству конечности показывает, *что для всякого алфавита с числом букв $\geqslant 4$ неразрешима проблема распознавания конечности K-системы.*

Принимая далее во внимание, что и разрешимость проблемы тождества является наследственным свойством K-систем, мы получаем результат нашей предыдущей заметки, касающийся мета-проблемы тождества.

16. Чтобы получить установленную в предыдущей заметке нераспознаваемость групп среди K-систем, надо воспользоваться существованием K-систем, не включаемых в группы. Такой K-системой является, например, K-система, определяемая соотношением $aa \longleftrightarrow a$ в однобуквенном алфавите $\{a\}$. Так как, с другой стороны, единичная K-система есть группа, мы можем применить нашу общую теорему к свойству быть группой при $n = 0$, что и дает соответствующий результат предыдущей заметки.

17. Мы перейдем теперь к рассмотрению более широкого класса ассоциативных систем, для которого удается получить более сильную теорему нераспознаваемости.

Пусть $\mathfrak{R}$ — конечная система соотношений в алфавите A; $B_1, \ldots, B_k$ — слова в этом алфавите. Будем рассматривать K-систему S, определяемую системой соотношений $\mathfrak{R}$. Ее элементы, выражаемые соединениями $B_{i_1} \ldots B_{i_m}$ слов B_i $(m \geqslant 0,\ 1 \leqslant i_\lambda \leqslant k)$, образуют ассоциативную подсистему системы S. Эту подсистему мы будем называть *ассоциативной системой, определяемой в алфавите* A *системой соотношений* $\mathfrak{R}$ *и словами* $B_1, \ldots, B_k$. Всякую ассоциативную систему, определимую таким образом, мы будем называть *П-системой*. О П-системе, определимой указанным образом с помощью алфавита A, будем говорить, что она *определима в* A. Легко может быть доказано, что всякая П-система определима в алфавите из двух букв.

18. Всякая K-система является, очевидно, П-системой. Понятие инвариантного свойства распространяется очевидным образом на П-системы. Для П-систем, определимых в алфавите A, может быть поставлена следующая *проблема распознавания свойства* $\mathfrak{P}$.

Пусть $\mathfrak{P}$ — инвариантное свойство П-систем. Требуется указать алгорифм, посредством которого можно было бы для любой конечной системы соотношений в A и любой конечной системы слов в A узнавать, обладает ли этим свойством П-система, определяемая ими в A.

19. С помощью методов, аналогичных вышеуказанным, может быть доказана следующая теорема невозможности.

Пусть $\mathfrak{P}$ *— инвариантное свойство* П*-систем. Если существуют как* П*-система с этим свойством, так и* П*-система без него, то для всякого алфавита, содержащего более одной буквы, проблема распознавания свойства* $\mathfrak{P}$ *неразрешима: искомый в этой проблеме алгорифм невозможен.*

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
22 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Марков, ДАН, **55**, № 7 (1947). [2] А. Марков, ДАН, **58**, № 3 (1947). [3] А. Марков, ДАН, **77**, № 1 (1951). [4] E. L. Post, Journ. Symb. Logic, **12** : 1 (1947).