Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 6

МАТЕМАТИКА

В. К. ДЗЯДЫК

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ В СРЕДНЕМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 21 II 1951)

1. Простейшей периодической функцией, $(r-1)$-я производная которой имеет разрыв 1-го рода, является функция

$$D^{(r)}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kt+r\pi/2)}{k^r}.$$

Фавар доказал [1], что при заданном n тригонометрическим полиномом, наименее уклоняющимся в среднем от функции $D^{(r)}(t)$, будет полином $T^*_{n-1}(t)$, который интерполирует функцию $D^{(r)}(t)$ в нулях $\cos(nt+r\pi/2)$, и что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D^{(r)}(t)-T^*_{n-1}(t)|\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[D^{(r)}(t)-T^*_{n-1}(t)]\operatorname{sign}\cos\left(nt+\frac{r\pi}{2}\right)dt=\frac{4}{\pi}\frac{K_r}{n^r},$$

где

$$K_r=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Возникает вопрос, как влияет разрыв $(r-1)$-й производной функции $D^{(r)}(t)$ в точке $t=0$ на ее приближение (в среднем) в окрестности этой точки.

В этой работе мы получаем некоторые относящиеся к данному вопросу результаты, впервые высказанные без доказательства С. М. Никольским.

Теорема 1. *Каково бы ни было положительное число* ε $(0<\varepsilon<\pi)$, *при* $n\to\infty$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\pi}|D^{(r)}(t)-T^*_{n-1}(t)|\,dt\right]=\frac{2}{3}\int_{\varepsilon}^{\pi}|D^{(r)}(t)-T^*_{n-1}(t)|\,dt=O\left(\frac{1}{\varepsilon^2n^{r+1}}\right). \quad (1)$$

Доказательство. В силу того, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\begin{matrix}\sin kt\\ \cos kt\end{matrix}\operatorname{sign}\cos\left(Nt+\frac{r\pi}{2}\right)dt=0 \quad (k=0,1,2,\ldots,N-1),$$

мы имеем

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi [D^{(r)}(t)-T^*_{n-1}(t)]\left\{\operatorname{sign}\cos\left(nt+\frac{r\pi}{2}\right)-\operatorname{sign}\cos\left[(n+i)t+\frac{r\pi}{2}\right]\right\}dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi [D^{(r)}(t)-T^*_{n-1}(t)]\operatorname{sign}\cos\left(nt+\frac{r\pi}{2}\right)dt-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi [D^{(r)}(t)-T^*_{n+i-1}(t)]\operatorname{sign}\cos\left[(n+i)t+\frac{r\pi}{2}\right]dt=$$

$$=\frac{4K_r}{\pi}\left[\frac{1}{n^r}-\frac{1}{(n+i)^r}\right]=\frac{4K_r}{\pi}\frac{ri}{n^{r+1}}+O\left(\frac{1}{n^{r+2}}\right). \qquad (2)$$

Обозначим теперь через M_l множество точек из $[0, \pi]$, в которых $\operatorname{sign}\cos[(n+i)t+r\pi/2]=-\operatorname{sign}\cos(nt+r\pi/2)$, и покажем, что, какова бы ни была точка $t\in[\varepsilon, \pi]$, найдется некоторое конечное число k, не превышающее целой части числа $\pi/\varepsilon+1$ $(k\leqslant l=[\pi/\varepsilon+1])$, такое, что $t\in M_k$. В самом деле, считая точку t такой, что $\cos(nt+r\pi/2)\neq 0$ (нас интересует только этот случай), представим числа $(n+l)t+r\pi/2$ и $nt+r\pi/2$ в виде: $(n+l)t+r\pi/2=m_1\pi+s_1$, $nt+r\pi/2=m\pi+s$, где m и m_1 — натуральные числа и $-\pi/2<s<\pi/2$, $-\pi/2\leqslant s_1<\pi/2$.

Так как $m_1\pi+s_1-(m\pi+s)=lt>\pi$, то, очевидно, существует по крайней мере одно такое число k $(0<k\leqslant l)$, что $(n+k)t+r\pi/2=$ $=(m+1)\pi+s_2$, где $-\pi/2<s_2<\pi/2$. При этом k $t\in M_k$.

Теперь, в силу (2), мы имеем:

$$\frac{2}{\pi}\int_\varepsilon^\pi |D^{(r)}(t)-T^*_{n-1}(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{l}\int_{M_k}[D^{(r)}(t)-T^*_{n-1}(t)]\left\{\operatorname{sign}\cos\left(nt+\frac{r\pi}{2}\right)-\operatorname{sign}\cos\left[(n+k)t+\frac{r\pi}{2}\right]\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{l}\int_0^\pi[D^{(r)}(t)-T^*_{n-1}(t)]\left\{\operatorname{sign}\cos\left(nt+\frac{r\pi}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\operatorname{sign}\cos\left[(n+k)t+\frac{r\pi}{2}\right]\right\}dt=\frac{2K_r}{\pi}\frac{r}{n^{r+1}}\sum_{i=1}^{l}i+O\left(\frac{l}{n^{r+2}}\right)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^2 n^{r+1}}\right).$$

Примечание. Совершенно так же доказывается следующее более общее утверждение: *если функция $f(t)$ периода 2π обладает свойствами:* 1) *при произвольном n наилучший в среднем для функции $f(t)$ полином $T^*_{n-1}(t)$ интерполирует ее с переменой знака только в нулях $\cos(nt+r)$, где r — некоторое действительное число, одно и то же для всех n;* 2) $E_n(f)_L-E_{n+1}(f)_L=o\,[E_n(f)_L]$, *то тогда при произвольном наперед заданном* ε $(0<\varepsilon<\pi)$

$$\int_{-\pi}^{-\varepsilon}+\int_\varepsilon^\pi|f(t)-T^*_{n-1}(t)|\,dt=o\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-T^*_{n-1}(t)|\,dt\right\}.$$

Следствие. Если функция $f(t)$ периода 2π: 1) имеет абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка; 2) имеет (почти всюду) производную r-го порядка, удовлетворяющую неравенству $|f^{(r)}(t)|\leqslant M$, 3) на отрезке $[c-(a+\varepsilon),\ c+(a+\varepsilon)]$ является обыкновенным полиномом степени не выше $(r-1)$-й, то тогда тригонометрический полином $T_{n-1}(f;\ r;\ t)$ степени $n-1$, получаемый при помощи линейного метода, указанного Н. И. Ахиезером, М. Г. Крейном и Ж. Фаваром [2,3], в промежутке $[c-a,\ c+a]$ приближает (в метрике C) эту функцию с погрешностью, не превышающей $KM/\varepsilon^2 n^{r+1}$, где K есть некоторое постоянное число.

В самом деле, это непосредственно следует из (1), если учесть, что

$$|f(t)-T_{n-1}(f;\ r;\ t)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|D^{(r)}(\xi)-T_{n-1}^{*}(\xi)||f^{(r)}(\xi+t)|\,d\xi$$

и что при $t\in[c-a,\ c+a]$ и $\xi\in(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ $f^{(r)}(\xi+t)=0$.

2. Условимся обозначать через $E_n[f(t);\ a,\ b;\ K]$, где $-\pi<a<<b<\pi$, наилучшее приближение в среднем функции $f(t)$ в промежутке $[-\pi,\pi]$ при помощи тригонометрических полиномов $T_n(t)$ порядка n, подчиненных условию

$$\int\limits_{-\pi}^{a}+\int\limits_{b}^{\pi}|T_n(t)|\,dt\leqslant K. \tag{3}$$

Справедлива следующая лемма, идея доказательства которой в основном заимствована из работы С. Н. Бернштейна [4].

Лемма 1. *Пусть число α удовлетворяет условию*

$$2\alpha<\rho<1;$$

тогда, каково бы ни было положительное число ε, при достаточно большом n

$$E_n\Big[D^{(r)}(t);\ -\frac{1}{n^{\alpha}},\ \frac{1}{n^{\alpha}};\ n^{h}\Big]>(1-\varepsilon)\,E_n\,[D^{(r)}]_L\,, \tag{4}$$

где h — произвольное положительное число.

3. Пользуясь теоремой 1 и настоящей леммой, мы можем, применяя почти без изменений рассуждения, проведенные С. М. Никольским [5], доказать следующую лемму.

Лемма 2. *Если $a<a_1<a_2<\ldots<a_m<2\pi+a$ и*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{m}A_kD^{(r)}(t-a_k),$$

то

$$E_n(f)_L\approx\sum_{k=1}^{m}|A_k|\,E_n\,[D^{(r)}(t-a_k)]_L=\frac{4}{\pi}\frac{K_r}{n^r}\sum_{k=1}^{m}|A_k|.$$

Применяя же рассуждения, приведенные в [6], мы можем распространить эту лемму на случай, когда $m=\infty$, а также доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Если функция $f(t)$ периода 2π имеет абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка, которая, в свою очередь, является неопределенным интегралом от функции $\varphi(t)=f^{(r)}(t)$, обладающей следующими свойствами: 1) $\varphi(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[-\pi,\ \pi]$ и разлагается на сумму $\varphi(t)=g(t)+h(t)$, где $g(t)$ — функция скачков, а $h(t)$ — абсолютно непрерывная функ-*

ция; 2) $\varphi(t)$ *фактически имеет хотя бы один разрыв в* $[-\pi, \pi]$, *тогда*

$$E_n(f)_L \approx \frac{4}{\pi^2}\frac{K_{r+1}}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{\infty}|A_k|,$$

где $A_k = \varphi(a_k+0) - \varphi(a_k-0)$ (a_k — *точки из* $[-\pi, \pi]$, *в которых функция* $\varphi(t)$ *имеет существенный разрыв*).

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность С. М. Никольскому и А. Ф. Тиману, под руководством которых выполнена эта работа.

Поступило
21 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Favard, Math. Tids., Copenhague, 81 (1936). [2] J. Favard, Bull. de Sci. Math., 61, 209 (1937). [3] Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн, ДАН, **15**, 107 (1937). [4] С. Н. Бернштейн, ДАН, **18**, № 7 (1938). [5] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., **11**, 139 (1947). [6] С. М. Никольский, ДАН, **55**, № 3 (1947).