

УДК 537.874.2

Отражение и преломление плоских электромагнитных волн на границе раздела с биизотропной средой

В. Н. КАПШАЙ, В. В. КОНДРАТЮК

1 Введение. В последнее время активно ведется изучение электромагнитных свойств различных искусственных сред, в том числе биизотропных сред [1-3], с целью их последующего практического применения. Надо отметить, что в 90-х годах прошлого столетия в литературе велась дискуссия о «распознаваемом существовании» биизотропных сред [4-8]. Интерес теоретиков и экспериментаторов обращен к поиску эффектов, позволяющих распознать (идентифицировать) биизотропную среду, свидетельствующих о качественном отличии биизотропных сред от, например, гиротропных. В работах [9-12] были рассмотрены такие эффекты, возникающие при рассеянии плоской электромагнитной волны на биизотропном шаре или на металлическом шаре в биизотропной среде и в задачах об электромагнитных резонаторах, заполненных биизотропной средой. Следует отметить, что математически эти эффекты формулируются не самым простым образом. Поэтому, чтобы не маскировать проблему математическими сложностями, обратимся к решению задач об отражении плоской электромагнитной волны от плоской границы раздела вакуума – биизотропная среда.

2 Случай нормального падения. Рассмотрим отражение плоской линейно поляризованной волны, падающей нормально на плоскую границу раздела (плоскость xOy) вакуум-биизотропная среда. Электромагнитные свойства биизотропной среды описываются материальными уравнениями [1, 13-15]

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + (\chi + i\alpha) \vec{H}; \quad \vec{B} = (\chi - i\alpha) \vec{E} + \mu \vec{H}. \quad (1)$$

Пусть падающая монохроматическая волна распространяется в вакууме ($z < 0$) вдоль оси z и линейно поляризована против оси x . Тогда ее можно записать в виде

$$\vec{E}^n(\vec{r}, t) = -i\vec{E}_0^n e^{-i(\omega t - kz)}; \quad \vec{H}^n(\vec{r}, t) = -\vec{j}E_0^n e^{-i(\omega t - kz)}, \quad (2)$$

где $k = \omega/c$ – волновое число для вакуума.

Априорное предположение о том, что отраженную волну, аналогично случаю отражения от изотропного диэлектрика или гиротропной среды, следует считать линейно поляризованной вдоль той же оси x , приводит, как нетрудно убедиться, к невозможности удовлетворить граничные условия. Поэтому отраженную волну будем искать в общем виде, а именно в виде суперпозиции двух линейно поляризованных волн:

$$\vec{E}^o(\vec{r}, t) = (\vec{i}E_x^o + \vec{j}E_y^o) e^{-i(\omega t + kz)}; \quad \vec{H}^o(\vec{r}, t) = (\vec{i}E_y^o - \vec{j}E_x^o) e^{-i(\omega t + kz)}. \quad (3)$$

Прошедшую волну ($z > 0$) также следует искать в общем виде суперпозиции двух циркулярно поляризованных волн:

$$\vec{E}^{np}(\vec{r}, t) = -\sum_{\nu=\pm 1} (\vec{i} + i\nu\vec{j}) E_\nu^{np} e^{-i(\omega t - k_\nu z)}, \quad k_\nu = n_\nu \omega/c = \left(\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} + \nu\alpha \right) \omega/c, \quad (4)$$

где $\nu = \pm 1$ – поляризация волны ($\nu = +1$ – право поляризованная и $\nu = -1$ – лево поляризованная), k_ν – волновые числа, n_ν – показатели преломления биизотропной среды с материальными уравнениями (1). Напряженность магнитного поля прошедшей волны найдем из (1) и уравнений Максвелла как

$$\vec{H}^{np}(\vec{r}, t) = -i \frac{c}{\omega\mu} \text{rot} \vec{E}^{np}(\vec{r}, t) - \frac{\chi - i\alpha}{\mu} \vec{E}^{np}(\vec{r}, t) = \sum_{\nu=\pm 1} (\vec{i} + i\nu\vec{j}) b_\nu E_\nu^{np} e^{-i(\omega t - k_\nu z)}. \quad (5)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$b_\nu = \frac{1}{\mu} \left(\chi + i\nu \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} \right). \quad (6)$$

Граничные условия заключаются в требовании непрерывности тангенциальных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей на границе раздела:

$$\left[\vec{n}, \vec{E}^n + \vec{E}^o - \vec{E}^{np} \right]_{z=0} = 0; \quad \left[\vec{n}, \vec{H}^n + \vec{H}^o - \vec{H}^{np} \right]_{z=0} = 0. \quad (7)$$

Граничные условия (7) дают систему уравнений для определения амплитуд отраженной и прошедшей волн:

$$\begin{cases} E_x^o + E_+^{np} + E_-^{np} = E_0^n; & E_y^o + iE_+^{np} - iE_-^{np} = 0; \\ E_y^o - b_+ E_+^{np} - b_- E_-^{np} = 0; & -E_x^o - ib_+ E_+^{np} + ib_- E_-^{np} = E_0^n. \end{cases} \quad (8)$$

Решая систему уравнений (8), получаем следующие выражения для амплитуд:

$$E_\nu^{np} = \frac{E_0^n}{1 - i\nu b_\nu}; \quad E_x^o = \frac{\varepsilon - \mu}{\varepsilon + \mu + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}} E_0^n; \quad E_y^o = \frac{2\chi}{\varepsilon + \mu + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}} E_0^n. \quad (9)$$

Итак, мы видим, что при отражении от биизотропной среды плоскость поляризации отраженной волны (3) не совпадает с плоскостью поляризации падающей волны (2), чего не наблюдается ни в случае отражения от изотропного диэлектрика, ни в случае отражения от гиротропной среды. Другими словами, при $\chi \neq 0$ у отраженной волны появляется поляризация, отсутствующая при $\chi = 0$. Этот же результат, разумеется, мы получим и в случае, когда падающая волна поляризована вдоль оси y , или любой другой оси, перпендикулярной оси z . Угол поворота плоскости поляризации отраженной волны по сравнению с плоскостью поляризации падающей волны определяется формулой

$$\theta = \arctan \frac{2\chi}{\varepsilon - \mu}. \quad (10)$$

Если безразмерный параметр $\chi \ll 1$ [1], то величина угла поворота θ также очень мала, за исключением случая, когда $\varepsilon \approx \mu$. В этом случае модуль знаменателя в формуле (10) также мал и величина угла θ может оказаться значительной. В общем случае $|\theta| \leq \pi/2$, причем $|\theta| = \pi/2$, если $\varepsilon = \mu$. Направление поворота (если смотреть с положительного направления оси z): против часовой стрелки, если параметр $\chi/(\varepsilon - \mu)$ положителен и по часовой стрелке, если параметр $\chi/(\varepsilon - \mu)$ отрицателен. Из этого поворота плоскости поляризации и следует вывод о качественном отличии биизотропных сред с материальными уравнениями (1) от изотропных и гиротропных. По сути дела, измерение поляризации отраженной волны и позволит распознать биизотропную среду.

В экспериментах важны не только амплитудные, но и энергетические характеристики полей. Поэтому обратимся к нахождению явного вида плотности потока энергии (вектора Пойнтинга), усредненного по времени. Зная (комплексные) амплитуды полей (9), найдем для каждой из волн вектор плотности потока энергии:

$$\begin{aligned} \vec{S}_n &= \frac{c}{8\pi} |E_0^n|^2 \vec{k}; & \vec{S}_o &= -\frac{c}{8\pi} \frac{(\varepsilon - \mu)^2 + 4\chi^2}{\left(\varepsilon + \mu + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}\right)^2} |E_0^n|^2 \vec{k}; \\ \vec{S}_{np} &= \frac{c}{8\pi} \frac{4\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}}{\varepsilon + \mu + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}} |E_0^n|^2 \vec{k}. \end{aligned} \quad (11)$$

Найдя модули векторов (11), нетрудно проверить выполнение равенства $S_n = S_o + S_{np}$, т.е. тот факт, что при отражении электромагнитной волны от плоской границы раздела с биизотропной средой закон сохранения энергии выполняется, что подтверждает правильность вы-

ражений (9) и вытекающего из них эффекта изменения плоскости поляризации при отражении от биизотропной среды.

Рассмотрим теперь отражение **циркулярно поляризованной волны** при ее нормальном падении на границу раздела вакуум – биизотропная среда. Напряженности циркулярно поляризованной волны, распространяющейся вдоль оси z , можно представить в виде ($\lambda = \pm 1$)

$$\vec{E}_\lambda^n(\vec{r}, t) = E_\lambda^n (\vec{i} + i\lambda\vec{j}) e^{-i(\omega t - kz)}; \quad \vec{H}_\lambda^n(\vec{r}, t) = -i\lambda \vec{E}_\lambda^n(\vec{r}, t) = E_\lambda^n (\vec{j} - i\lambda\vec{i}) e^{-i(\omega t - kz)}. \quad (12)$$

Следуя логике решения предыдущей задачи, отраженную волну будем искать также в виде суперпозиции двух волн, которые теперь выберем циркулярно поляризованными ($\sigma = +1$ – право поляризованная волна, $\sigma = -1$ – лево поляризованная волна):

$$\vec{E}^o(\vec{r}, t) = \sum_{\sigma=\pm 1} (\vec{i} - i\sigma\vec{j}) E_\sigma^o e^{-i(\omega t + kz)}; \quad \vec{H}^o(\vec{r}, t) = -\sum_{\sigma=\pm 1} (\vec{j} + i\sigma\vec{i}) E_\sigma^o e^{-i(\omega t + kz)}. \quad (13)$$

Прошедшую волну также представим в виде суперпозиции двух циркулярно поляризованных волн (4), (5). Граничные условия (7) приводят к алгебраической системе

$$\begin{cases} E_+^o + E_-^o - E_+^{np} - E_-^{np} = -E_\lambda^n; & -E_+^o + E_-^o - E_+^{np} + E_-^{np} = -\lambda E_\lambda^n; \\ -E_+^o + E_-^o - ib_+ E_+^{np} - ib_- E_-^{np} = \lambda E_\lambda^n; & -E_+^o - E_-^o + ib_+ E_+^{np} - ib_- E_-^{np} = -E_\lambda^n. \end{cases} \quad (14)$$

Решая эту систему, получаем следующие выражения для амплитуд рассматриваемых волн:

$$E_\lambda^{np} = E_\lambda^n \frac{2}{1 - i\lambda b_\lambda}; \quad E_{-\lambda}^{np} = 0; \quad E_\lambda^o = 0; \quad E_{-\lambda}^o = E_\lambda^n \frac{\lambda + ib_\lambda}{1 - i\lambda b_\lambda}. \quad (15)$$

Таким образом, прошедшая волна имеет ту же круговую поляризацию, что и падающая, а отраженная – противоположную. Последнее можно объяснить тем, что падающая циркулярно поляризованная волна есть суперпозиция двух линейно (вдоль x и вдоль y) поляризованных волн с одинаковыми амплитудами, плоскость поляризации каждой из которых при отражении поворачивается на один и тот же угол (10), а амплитуды также изменяются в одинаковое число раз. В итоге отраженная волна имеет круговую поляризацию. При этом на границе раздела векторы напряженностей падающей и отраженной волны должны со временем вращаться в одном направлении, а значит, отраженная волна должна иметь поляризацию, противоположную падающей. Из граничных условий очевидно, что прошедшая волна тогда должна иметь ту же циркулярную поляризацию, что и падающая.

Зная (15), определим вид векторов Пойнтинга для найденных волн:

$$\begin{aligned} \vec{S}_n &= \frac{c}{8\pi} 2 |E_\lambda^n|^2 \vec{k}; & \vec{S}_o &= -\frac{c}{8\pi} \frac{\varepsilon + \mu - 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}}{\varepsilon + \mu + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}} 2 |E_\lambda^n|^2 \vec{k}; \\ \vec{S}_{np} &= \frac{c}{8\pi} \frac{8\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}}{\varepsilon + \mu + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}} |E_\lambda^n|^2 \vec{k}. \end{aligned} \quad (16)$$

Нетрудно убедиться, что баланс энергий $S_n = S_o + S_{np}$ в данном случае также выполняется.

Теперь решим аналогичную задачу о нормальном падении плоской волны, распространяющейся в биизотропной среде ($z < 0$), на плоскую границу раздела ($z = 0$) биизотропная среда – вакуум. Для падающей волны с правой ($\lambda = +1$) или левой ($\lambda = -1$) поляризацией имеем (величины b_ν заданы в (6))

$$\vec{E}_\lambda^n(\vec{r}, t) = E_\lambda^n (\vec{i} + i\lambda\vec{j}) e^{-i(\omega t - k_\lambda z)}; \quad \vec{H}_\lambda^n(\vec{r}, t) = -b_\lambda \vec{E}_\lambda^n(\vec{r}, t) = -b_\lambda E_\lambda^n (\vec{i} + i\lambda\vec{j}) e^{-i(\omega t - k_\lambda z)}. \quad (17)$$

Отраженную волну будем искать в виде суперпозиции двух циркулярно поляризованных волн (аналогичных (13)):

$$\vec{E}^o(\vec{r}, t) = \sum_{\sigma=\pm 1} (\vec{i} - i\sigma\vec{j}) E_\sigma^o e^{-i(\omega t + k_\sigma z)}; \quad \vec{H}^o(\vec{r}, t) = -\sum_{\sigma=\pm 1} b_\sigma (\vec{j} + i\sigma\vec{i}) E_\sigma^o e^{-i(\omega t + k_\sigma z)} \quad (18)$$

Поле прошедшей волны теперь можно представить в виде суперпозиции двух линейно поляризованных волн:

$$\vec{E}^{np}(\vec{r}, t) = (\vec{i} E_x^{np} + \vec{j} E_y^{np}) e^{-i(\omega t - kz)}; \quad \vec{H}^{np}(\vec{r}, t) = (-\vec{i} E_y^{np} + \vec{j} E_x^{np}) e^{-i(\omega t - kz)}. \quad (19)$$

Из условий на границе в этом случае получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} E_+^o + E_-^o - E_x^{np} = -E_\lambda^n; & -iE_+^o + iE_-^o - E_y^{np} = -i\tau E_\lambda^n; \\ -b_+ E_+^o - b_- E_-^o + E_y^{np} = b_\tau E_\lambda^n; & ib_+ E_+^o - ib_- E_-^o - E_x^{np} = i\tau b_\tau E_\lambda^n, \end{cases} \quad (20)$$

из которой находим комплексные амплитуды волн (18), (19) в виде:

$$E_\lambda^o = 0; \quad E_{-\lambda}^o = \frac{-1 - i\lambda b_{-\lambda}}{1 + i\lambda b_{-\lambda}} E_\lambda^n; \quad E_x^{np} = -\frac{i(b_+ - b_-)}{1 + i\lambda b_{-\lambda}} E_\lambda^n; \quad E_y^{np} = i\lambda E_x^{np} = \lambda \frac{b_+ - b_-}{1 + i\lambda b_{-\lambda}} E_\lambda^n. \quad (21)$$

Найдем также вид векторов Пойнтинга для этой задачи:

$$\begin{aligned} \vec{S}_n &= \frac{c}{8\pi} \frac{2}{\mu} \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} |E_\lambda^n|^2 \vec{k}; & \vec{S}_{np} &= \frac{c}{8\pi} \frac{8}{\mu} \frac{\varepsilon\mu - \chi^2}{\varepsilon + \mu + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}} |E_\lambda^n|^2 \vec{k}; \\ \vec{S}_o &= -\frac{c}{8\pi} \frac{2}{\mu} \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} \frac{\varepsilon + \mu - 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}}{\varepsilon + \mu + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}} |E_\lambda^n|^2 \vec{k}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (21) ясно, что прошедшая волна циркулярно поляризована, причем, как и в предыдущей задаче, поляризация прошедшей волны совпадает с поляризацией волны падающей. Отраженная волна имеет поляризацию, противоположную падающей.

3 Наклонное падение. Обобщим теперь полученные результаты на случай наклонного падения, рассмотрим падение из вакуума на биизотропную среду. Пусть вектор направления распространения падающей волны \vec{n}_n лежит в плоскости xOz (плоскость падения) и составляет угол β с осью z (угол падения). Очевидно, что угол отражения также будет равен β . В биизотропной среде будем иметь две преломленные (прошедшие) циркулярно поляризованные волны, показатели преломления которых n_+ и n_- различны, а значит и углы преломления γ_+ и γ_- , определяемые из условий $n_v \sin \gamma_v = \sin \beta$, различны. Все четыре вектора, задающих направления распространения падающей (\vec{n}_n), отраженной (\vec{n}_o) и двух преломленных (\vec{n}_+ и \vec{n}_-) волн лежат в плоскости xOz (см. рис. 1).

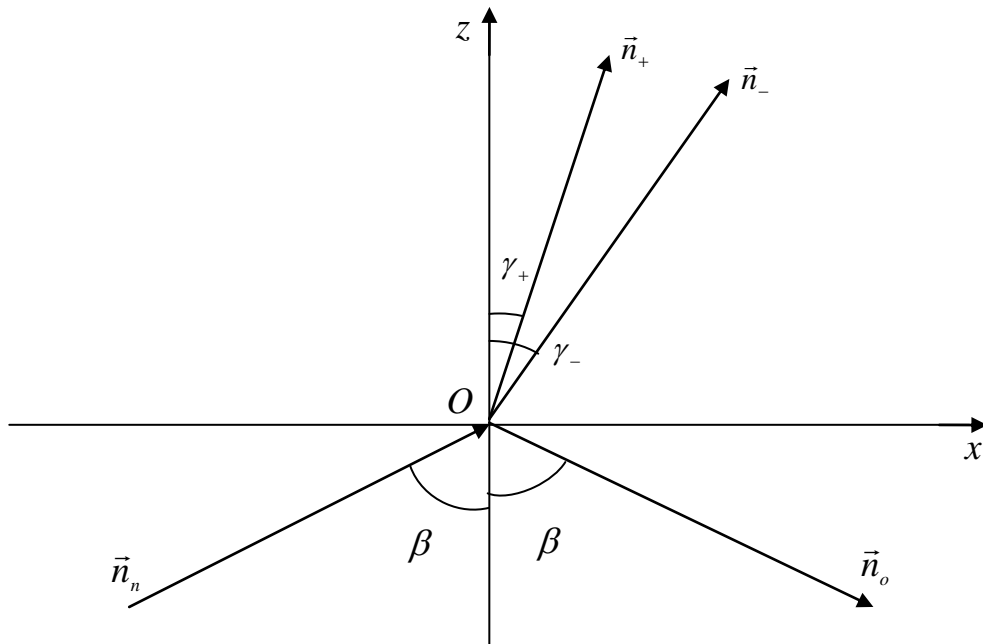


Рисунок 1 – Векторы, задающие направления распространения падающей (\vec{n}_n), отраженной (\vec{n}_o) и преломленных (\vec{n}_+ и \vec{n}_-) волн

Для удобства последующих рассуждений приведем компоненты этих векторов:

$$\begin{cases} \vec{n}_n = (\sin \beta; 0; \cos \beta); & \vec{n}_o = (\sin \beta; 0; -\cos \beta); \\ \vec{n}_+ = (\sin \gamma_+; 0; \cos \gamma_+); & \vec{n}_- = (\sin \gamma_-; 0; \cos \gamma_-). \end{cases} \quad (23)$$

Также удобно ввести ортогональные им единичные векторы, лежащие в плоскости падения

$$\begin{cases} \vec{l}_n = (-\cos \beta; 0; \sin \beta); & \vec{l}_o = (\cos \beta; 0; \sin \beta); \\ \vec{l}_+ = (-\cos \gamma_+; 0; \sin \gamma_+); & \vec{l}_- = (-\cos \gamma_-; 0; \sin \gamma_-), \end{cases} \quad (24)$$

и перпендикулярный плоскости падения вектор $\vec{m} = -\vec{j} = (0; -1; 0)$.

Падающая волна поляризована в плоскости xOz . В терминах векторов (23), (24) такую волну можно записать в виде:

$$\vec{E}^n(\vec{r}, t) = \vec{l}_n E_0^n e^{-i(\omega t - \vec{k}_n \vec{r})}; \quad \vec{H}^n(\vec{r}, t) = -\vec{j} E_0^n e^{-i(\omega t - \vec{k}_n \vec{r})}; \quad \vec{k}_n = k \vec{n}_n; \quad k = \omega/c. \quad (25)$$

Отраженную волну, аналогично (3), следует искать в виде суперпозиции двух линейно поляризованных волн:

$$\vec{E}^o(\vec{r}, t) = (\vec{l}_o E_r^o + \vec{j} E_n^o) e^{-i(\omega t - \vec{k}_o \vec{r})}; \quad \vec{H}^o(\vec{r}, t) = (\vec{l}_o E_n^o - \vec{j} E_r^o) e^{-i(\omega t - \vec{k}_o \vec{r})}; \quad \vec{k}_o = k \vec{n}_o. \quad (26)$$

Прошедшую волну следует искать в виде суперпозиции двух циркулярно поляризованных волн ($\vec{k}_v = k_v \vec{n}_v$):

$$\vec{E}^{np}(\vec{r}, t) = \sum_{\nu=\pm 1} (\vec{l}_v + i\nu \vec{m}) E_v^{np} e^{-i(\omega t - \vec{k}_v \vec{r})}; \quad \vec{H}^{np}(\vec{r}, t) = -\sum_{\nu=\pm 1} (\vec{l}_v + i\nu \vec{m}) b_\nu E_v^{np} e^{-i(\omega t - \vec{k}_v \vec{r})}. \quad (27)$$

При $\beta = 0$ (25) переходит в (2), (26) в (3), а (27) в (4) и (5). Из граничных условий (7) получаем следующую систему уравнений для определения амплитуд отраженной и преломленных волн:

$$\begin{cases} E_r^o + \delta_+ E_+^{np} + \delta_- E_-^{np} = E_0^n; & E_n^o + iE_+^{np} - iE_-^{np} = 0; \\ E_n^o - b_+ \delta_+ E_+^{np} - b_- \delta_- E_-^{np} = 0; & -E_r^o - ib_+ E_+^{np} + ib_- E_-^{np} = E_0^n, \end{cases} \quad (28)$$

где введены обозначения: $\delta_\nu = \cos \gamma_\nu / \cos \beta$. Решая систему уравнений (28), получаем следующие выражения для амплитуд:

$$\begin{aligned} E_v^{np} &= E_0^n \frac{2(1 + i\nu b_{-\nu} \delta_{-\nu})}{(\delta_\nu + \delta_{-\nu})(1 + b_\nu b_{-\nu}) - i\nu(b_\nu - b_{-\nu})(1 + \delta_\nu \delta_{-\nu})}; \\ E_n^o &= E_0^n \frac{2(b_+ \delta_+ + b_- \delta_-)}{(\delta_+ + \delta_-)(1 + b_+ b_-) - i(b_+ - b_-)(1 + \delta_+ \delta_-)}; \\ E_r^o &= E_0^n \frac{(\delta_+ + \delta_-)(b_+ b_- - 1) - i(b_+ - b_-)(1 - \delta_+ \delta_-)}{(\delta_+ + \delta_-)(1 + b_+ b_-) - i(b_+ - b_-)(1 + \delta_+ \delta_-)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Явный вид векторов Пойнтинга рассматриваемой задачи следующий:

$$\begin{aligned} \vec{S}_n &= \frac{c}{8\pi} |E_0^n|^2 \vec{n}_n; & \vec{S}_o &= \frac{c}{8\pi} |E_0^n|^2 \vec{n}_o \times \\ & \times \frac{\left[(\delta_+ + \delta_-)(\varepsilon - \mu) + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} (1 - \delta_+ \delta_-) \right]^2 + 4\varepsilon\mu(\delta_+^2 + \delta_-^2) + \delta_+ \delta_- (16\chi^2 - 8\varepsilon\mu)}{\left[(\delta_+ + \delta_-)(\varepsilon + \mu) + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} (1 + \delta_+ \delta_-) \right]^2}; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\vec{S}_v^{np} = \frac{c}{8\pi} |E_0^n|^2 \vec{n}_v 8\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} \frac{\mu + \varepsilon\delta_{-\nu}^2 + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} \delta_{-\nu}}{\left[(\delta_+ + \delta_-)(\varepsilon + \mu) + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} (1 + \delta_+ \delta_-) \right]^2}.$$

Можно убедиться, что баланс энергий, который в случае наклонного падения нужно записывать в форме

$$\left(\vec{S}_n + \vec{S}_o - \vec{S}_+ - \vec{S}_- \right)_z = 0, \quad (31)$$

выполняется.

Считая, для простоты, что E_0^n вещественно, находим, что в формулах (29) коэффициент отраженной волны E_r^o вещественный, а коэффициент E_n^o – комплексный. Это означает, что отраженная волна является эллиптически поляризованной (падающая – линейно поляризована). Главная ось эллипса поляризации наклонена к плоскости падения под углом θ_1 , определяемом из

$$\tan \theta_1 = \tan \chi_1 + \tan \varphi_1 \tan \psi_1; \quad \tan \chi_1 = \frac{2\chi(\delta_+ + \delta_-)}{(\delta_+ + \delta_-)(\varepsilon - \mu) + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}(1 - \delta_+\delta_-)}; \quad (32)$$

$$\tan \varphi_1 = \frac{2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}(\delta_+ - \delta_-)}{(\delta_+ + \delta_-)(\varepsilon - \mu) + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}(1 - \delta_+\delta_-)}, \quad \tan 2\psi_1 = \frac{2 \tan \chi_1 \tan \varphi_1}{1 + \tan^2 \chi_1 - \tan^2 \varphi_1}.$$

Отношение малой и большой полуосей эллипса поляризации d_1/c_1 определяется из соотношений

$$\frac{d_1^2}{c_1^2} = \tan(\alpha_1 - \psi_1) \tan(\alpha_1 + \psi_1); \quad \tan \alpha_1 = \tan \varphi_1 \cos \chi_1. \quad (33)$$

Очевидно, что в пределе нормального падения $\theta_1 \rightarrow \theta$, где θ задается формулой (10), а $d_1/c_1 \rightarrow 0$. Указанная эллиптичность отраженной волны (когда падающая – линейно поляризована) также представляет собой в принципе наблюдаемый эффект, радикально отличающий биизотропную среду от изотропного диэлектрика или от гиротропной среды.

Падающая волна поляризована перпендикулярно плоскости падения. В терминах векторов (23), (24) поля падающей волны, поляризованной вдоль оси y , запишутся в виде:

$$\vec{E}^n(\vec{r}, t) = \vec{j}E_0^n e^{-i(\omega t - \vec{k}_n \vec{r})}; \quad \vec{H}^n(\vec{r}, t) = \vec{l}_n E_0^n e^{-i(\omega t - \vec{k}_n \vec{r})}. \quad (34)$$

Отраженную волну, как и ранее, будем искать в виде суперпозиции двух линейно поляризованных волн, задаваемой формулами (26). Поле прошедшей волны будет описываться формулами (27). Граничные условия (7) приводят к системе

$$\begin{cases} E_r^o + i\delta_+ E_+^{np} - i\delta_- E_-^{np} = 0; & E_n^o - E_+^{np} - E_-^{np} = E_0^n; \\ E_n^o - ib_+ \delta_+ E_+^{np} + ib_- \delta_- E_-^{np} = E_0^n; & -E_r^o + b_+ E_+^{np} + b_- E_-^{np} = 0, \end{cases} \quad (35)$$

из которой нетрудно получить интересующие нас амплитуды:

$$E_v^{np} = E_0^n \frac{2(\delta_{-v} + ib_{-v})}{(\delta_v + \delta_{-v})(1 + b_v b_{-v}) - iv(b_v - b_{-v})(1 + \delta_v \delta_{-v})};$$

$$E_n^o = E_0^n \frac{(\delta_+ + \delta_-)(1 - b_+ b_-) - i(b_+ - b_-)(1 - \delta_+ \delta_-)}{(\delta_+ + \delta_-)(1 + b_+ b_-) - i(b_+ - b_-)(1 + \delta_+ \delta_-)}; \quad (36)$$

$$E_r^o = E_0^n \frac{2(b_+ \delta_- + b_- \delta_+)}{(\delta_+ + \delta_-)(1 + b_+ b_-) - i(b_+ - b_-)(1 + \delta_+ \delta_-)}.$$

Приведем вид векторов Пойнтинга всех волн:

$$\vec{S}_n = \frac{c}{8\pi} |E_0^n|^2 \vec{n}_n; \quad \vec{S}_o = \frac{c}{8\pi} |E_0^n|^2 \vec{n}_o \times$$

$$\times \frac{\left[(\delta_+ + \delta_-)(\mu - \varepsilon) + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}(1 - \delta_+\delta_-) \right]^2 + 4\varepsilon\mu(\delta_+^2 + \delta_-^2) + \delta_+\delta_-(16\chi^2 - 8\varepsilon\mu)}{\left[(\delta_+ + \delta_-)(\varepsilon + \mu) + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}(1 + \delta_+\delta_-) \right]^2}; \quad (37)$$

$$\vec{S}_v^{np} = \frac{c}{8\pi} |E_0^n|^2 \vec{n}_v 8\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} \frac{\mu\delta_{-v}^2 + \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}\delta_{-v}}{\left[(\delta_+ + \delta_-)(\varepsilon + \mu) + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}(1 + \delta_+\delta_-) \right]^2}.$$

Закон сохранения энергии в форме (31) в этом случае также выполняется. Опять считая, для простоты, что E_0^n вещественно, находим, что в формулах (36) коэффициент отра-

женной волны E_n^o вещественный, а E_r^o – комплексный. Отраженная волна, таким образом, эллиптически поляризована. Главная ось эллипса поляризации наклонена к оси y под углом θ_2 , определяемом из

$$\tan \theta_2 = \tan \chi_2 + \tan \varphi_2 \tan \psi_2; \quad \tan \chi_2 = \frac{2\chi(\delta_+ + \delta_-)}{(\delta_+ + \delta_-)(\varepsilon - \mu) - 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}(1 - \delta_+\delta_-)}; \quad (38)$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}(\delta_- - \delta_+)}{(\delta_+ + \delta_-)(\varepsilon - \mu) - 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}(1 - \delta_+\delta_-)}, \quad \tan 2\psi_2 = \frac{2 \tan \chi_2 \tan \varphi_2}{1 + \tan^2 \chi_2 - \tan^2 \varphi_2}.$$

Отношение полуосей эллипса поляризации d_2/c_2 определяется из

$$\frac{d_2^2}{c_2^2} = \tan(\alpha_2 - \psi_2) \tan(\alpha_2 + \psi_2); \quad \tan \alpha_2 = \tan \chi_2 \cos \theta_2. \quad (39)$$

В пределе нормального падения $\theta_2 \rightarrow \theta$, а $d_2/c_2 \rightarrow 0$.

Падающая волна циркулярно поляризована. С использованием векторов (23), (24) поля такой падающей волны можно записать в виде:

$$\vec{E}_\lambda^n(\vec{r}, t) = E_\lambda^n (\vec{l}_n + i\lambda \vec{m}) e^{-i(\omega t - \vec{k}_n \vec{r})}; \quad \vec{H}_\lambda^n(\vec{r}, t) = E_\lambda^n (\vec{m} - i\lambda \vec{l}_n) e^{-i(\omega t - \vec{k}_n \vec{r})}. \quad (40)$$

Прошедшую волну представим в виде суперпозиции циркулярно поляризованных волн, задаваемых (27). Отраженную волну будем искать в виде суперпозиции циркулярно поляризованных волн:

$$\vec{E}^o(\vec{r}, t) = \sum_{\sigma=\pm 1} E_\sigma^o (\vec{l}_o + i\sigma \vec{m}) e^{-i(\omega t - \vec{k}_\sigma \vec{r})}; \quad \vec{H}^o(\vec{r}, t) = \sum_{\sigma=\pm 1} E_\sigma^o (\vec{m} - i\sigma \vec{l}_o) e^{-i(\omega t - \vec{k}_\sigma \vec{r})}. \quad (41)$$

Граничные условия приводят к следующей системе уравнений для определения амплитуд рассматриваемых волн:

$$\begin{cases} E_+^o + E_-^o + \delta_+ E_+^{np} + \delta_- E_-^{np} = E_\lambda^n; & -E_+^o + E_-^o + E_+^{np} - E_-^{np} = \lambda E_\lambda^n; \\ -E_+^o + E_-^o + i b_+ \delta_+ E_+^{np} + i b_- \delta_- E_-^{np} = -\lambda E_\lambda^n; & -E_+^o - E_-^o - i b_+ E_+^{np} + i b_- E_-^{np} = E_\lambda^n. \end{cases} \quad (42)$$

Решая систему (42), получаем следующие выражения для амплитуд:

$$E_v^{np} = E_\lambda^n \frac{2(1 + \lambda \delta_{-\lambda})(1 + i b_{-\lambda})}{(\delta_\lambda + \delta_{-\lambda})(1 + b_\lambda b_{-\lambda}) + i\lambda(b_{-\lambda} - b_\lambda)(1 + \delta_\lambda \delta_{-\lambda})};$$

$$E_-^o = E_\lambda^n \frac{(\delta_+ + \delta_-)(1 + i b_-)(-1 - i b_+)}{(\delta_+ + \delta_-)(1 + b_+ b_-) + i(b_- - b_+)(1 + \delta_+ \delta_-)}; \quad (43)$$

$$E_+^o = E_\lambda^n \frac{i(b_+ - b_-)(1 - \delta_-)(\delta_+ - 1)}{(\delta_+ + \delta_-)(1 + b_+ b_-) + i(b_- - b_+)(1 + \delta_+ \delta_-)}.$$

Явный вид векторов Пойнтинга всех волн:

$$\vec{S}_n = \frac{c}{8\pi} 2 |E_\lambda^n|^2 \vec{n}_n; \quad \vec{S}_\lambda^o = \frac{c}{8\pi} 2 |E_\lambda^n|^2 \vec{n}_o \frac{4(\varepsilon\mu - \chi^2)(1 + \delta_-)^2 (1 - \delta_+)^2}{\left[(\delta_+ + \delta_-)(\varepsilon + \mu) + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}(1 + \delta_+\delta_-) \right]^2};$$

$$\vec{S}_{-\lambda}^o = \frac{c}{8\pi} 2 |E_\lambda^n|^2 \vec{n}_o \frac{\left((\varepsilon - \mu)^2 + 4\chi^2 \right) (\delta_+ + \delta_-)^2}{\left[(\delta_+ + \delta_-)(\varepsilon + \mu) + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}(1 + \delta_+\delta_-) \right]^2}; \quad (44)$$

$$\vec{S}_v^{np} = \frac{c}{8\pi} 2 |E_\lambda^n|^2 \vec{n}_v \frac{\left(\varepsilon + \mu + \lambda 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} \right) (1 - \delta_v)^2}{\left[(\delta_+ + \delta_-)(\varepsilon + \mu) + 2\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}(1 + \delta_+\delta_-) \right]^2}.$$

Закон сохранения энергии в форме $(\vec{S}_n + \vec{S}_+^o + \vec{S}_-^o - \vec{S}_+^{np} - \vec{S}_-^{np})_z = 0$ выполняется.

Полученные выражения для векторов Пойнтинга проанализированы численно в зависимости от параметров биизотропной среды и угла падения. Например, для наклонного падения на границу раздела вакуум – биизотропная среда плоской волны, поляризованной в плоскости падения, и перпендикулярно ей имеем зависимости, показанные на рис. 2, 3.

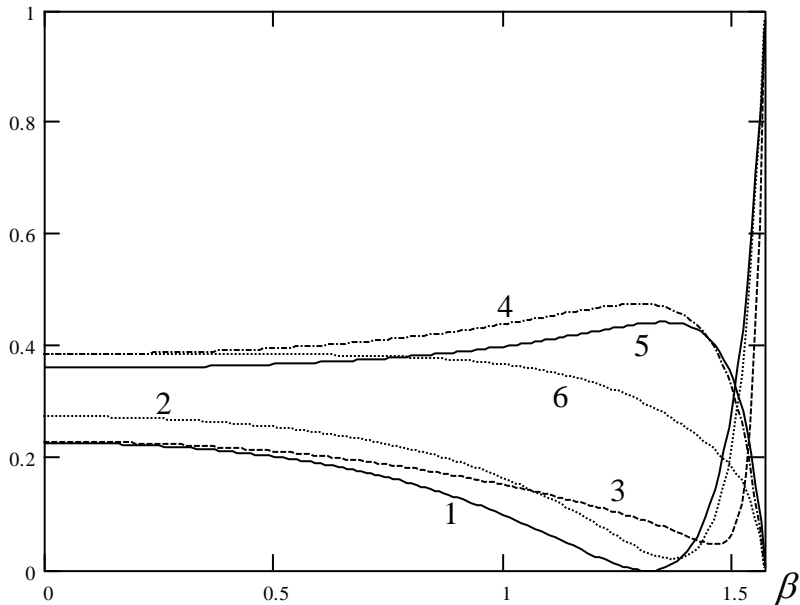


Рисунок 2 – Зависимость z – проекции вектора Пойнтинга отраженной волны (1-3) от угла падения β для параметров среды $\varepsilon = 4$; $\mu = 0.5$: 1) $\alpha = 0.1$, $\chi = 0.1$; 2) $\alpha = 0.1$, $\chi = 0.6$; 3) $\alpha = 0.4$, $\chi = 0.1$, и прошедшей право поляризованной волны (4-6) для тех же параметров среды соответственно. Падающая волна поляризована в плоскости падения

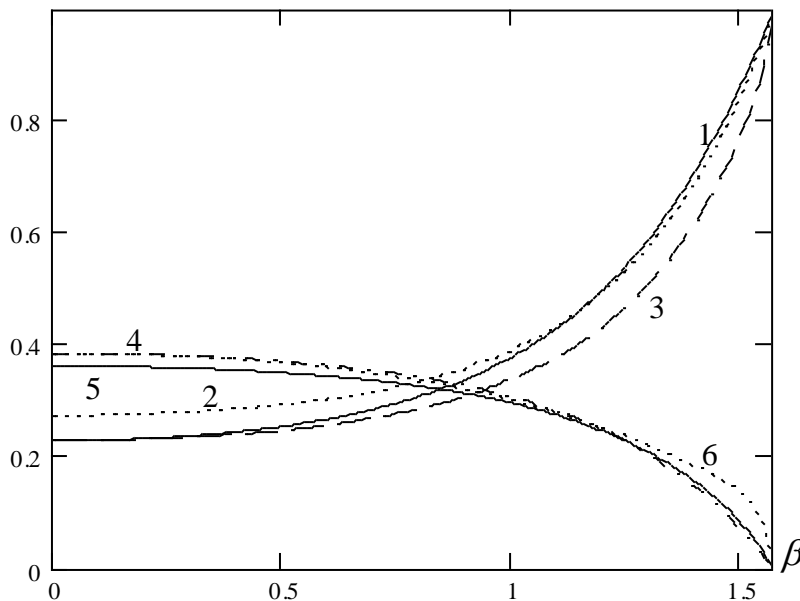


Рисунок 3 – Зависимость z – проекции вектора Пойнтинга отраженной волны (1-3) от угла падения β для параметров среды $\varepsilon = 4$; $\mu = 0.5$: 1) $\alpha = 0.1$, $\chi = 0.1$; 2) $\alpha = 0.1$, $\chi = 0.6$; 3) $\alpha = 0.4$, $\chi = 0.1$, и прошедшей лево поляризованной волны (4-6) для тех же параметров среды соответственно. Падающая волна поляризована перпендикулярно плоскости падения

4 Заключение. Итак, в настоящей работе исследовано отражение и преломление электромагнитных волн на плоской границе раздела вакуум – биизотропная среда. Это исследование в большой степени было инициировано проводившейся не так давно дискуссией о «распознаваемом существовании» биизотропных сред, в ходе которой некоторые авторы утверждали [4, 5], что биизотропная среда не может быть распознана ни в каких экспериментах, поскольку вся роль параметра χ сводится лишь к изменению показателей преломления гиротропной среды $n^\pm = \sqrt{\varepsilon\mu} \pm \alpha$ на показатели $n_\pm = \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} \pm \alpha$, а такое изменение может быть получено простым изменением параметра $\varepsilon\mu$. Авторы [4, 5] при этом не обращали внимания на изменение поляризации волн в биизотропной среде по сравнению с поляризацией волн в киральной среде. Конечно, в обоих случаях поляризация является круговой. Но это разные круговые поляризации. В гиротропной среде вектор $\vec{H}(t, \vec{r})$ ортогонален вектору $\vec{E}(t, \vec{r})$, и оба со временем вращаются по кругу вокруг вектора \vec{n} . В биизотропной среде векторы $\vec{E}(t, \vec{r})$ и $\vec{H}(t, \vec{r})$ со временем также вращаются вокруг вектора \vec{n} по кругу. Но вектор $\vec{H}(t, \vec{r})$ уже не ортогонален вектору $\vec{E}(t, \vec{r})$. Это обстоятельство и становится причиной обнаруженных в данной работе эффектов изменения поляризации отраженной от биизотропной среды волны, принципиально отличающих биизотропную среду от гиротропной или изотропной. При нормальном падении линейно поляризованной волны отраженная волна также линейно поляризована, но плоскость поляризации отраженной волны повернута относительно плоскости поляризации падающей волны. Зависимость угла поворота от параметров биизотропной среды дается формулой (10).

При наклонном падении линейно поляризованной (в плоскости падения или перпендикулярно ей) отраженная волна поляризована эллиптически, причем главная ось эллипса поляризации наклонена по отношению к плоскости поляризации падающей волны. В обоих случаях определены эти углы наклона и отношения полуосей эллипсов поляризации (формулы (32)-(33) и (38)-(39)).

В работе также решены задачи о нормальном и наклонном падении циркулярно поляризованных волн. Во всех рассмотренных случаях найдены векторы Пойнтинга всех волн и проверено выполнение закона сохранения энергии.

Abstract. Reflection and refraction of plane electromagnetic waves are investigated for the case of the plane boundary vacuum – biisotropic medium. It is shown that at the normal incidence of the linearly polarized wave the reflected wave is also linearly polarized, but its polarization plane is rotated to the incident wave polarization plane. The dependence of the rotation angle is found as a function of the biisotropic medium parameters.

It is shown that at the oblique incidence of the linearly polarized wave (in the incidence plane or perpendicular to it) the reflected wave is elliptically polarized and the main axis of the polarization ellipse is oblique to the incident wave polarization plane. The oblique angles and the ratios of the half axes of the polarization ellipses are found in the both cases. Such polarization of the wave refracted from the biisotropic medium distinguishes the biisotropic medium from an isotropic or chiral medium radically.

The problems of normal and oblique incidence of circularly polarized waves are also solved. In all the cases the pointing vectors of all the waves are found and the energy conservation is examined.

Литература

1. I.V. Lindell, A.H. Sihvola, S.A. Tretyakov, A.J. Viitanen. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media*. Artech House, Boston and London, 1994.
2. Serdyukov, I. Semchenko, S. Tretyakov, A. Sihvola. *Electromagnetics of Bi-anisotropic Materials Theory and Applications*. Overseas Publishers Association, 2001.
3. I.V. Semchenko, S.A. Tretyakov, A.N. Serdyukov. *Progress in Electromagnetic Re-*

- search.* (PIER), 12 (1996) 335-370.
4. W.S. Weiglhofer, A. J. Lakhtakia. *J. Phys. A.: Math. Gen.*, 30 (1997) 2597-2600.
 5. А. Лакхтакия, В.С. Вейгльхофер. *Радиотехника и электроника*, 43, №4 (1998) 494-495.
 6. I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, S.A. Tretyakov, H. Sihvola, E.A. Fedosenko. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 31 (1998) 2458-2464.
 7. S.A. Tretyakov, A.H. Sihvola, I.V. Semchenko, S. A. Khakhomov. *J. Phys.D: Appl. Phys.* 32 (1999) 2705-2706.
 8. R.E. Raab, A.H. Sihvola. *J. Phys. A.: Math. Gen.*, 30 (1997) 1335-1344.
 9. Капшай В.Н., Кондратюк В.В. *Электромагнитные поля в биизотропной среде внутри и вне металлической сферы*. Известия ВУЗов. Физика. Томск, 2000 – №11, с. 79-84.
 10. Капшай В.Н., Кондратюк В.В. *Рассеяние электромагнитных циркулярно поляризованных волн на биизотропном шаре в киральной среде*. Известия ГГУ им. Ф. Скорины, № 5 (8), Проблемы взаимодействия излучения с веществом, 2001, с. 97-101.
 11. Капшай В.Н., Кондратюк В.В. *Рассеяние плоских электромагнитных волн на биизотропном шаре в вакууме*. ЖПС, V. 70, N 6, 2003, с. 784-787
 12. Капшай В.Н., Кондратюк В.В., Годлевская А.Н. *Собственные частоты двухслойных сферических металлических резонаторов с биизотропным слоем*. Известия ГГУ им. Ф. Скорины, № 6 (39), 1, 2006, с. 90-93.
 13. A.H. Sihvola, I.V. Lindell. *Microwave and Opt. Technol. Lett.*, 4, N.8 (1991) 295-297
 14. J.C. Monzon. *IEEE Transactions of Antennas and Propagation*, 38, N.2 (1990) 227-235
 15. I.V. Lindell, A.H. Sihvola, A.J. Viitanen. *Microwave and Opti. Technol. Lett.*, 5, N.2 (1992) 79-81.