Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 5

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

В. И. МИХЕЕВ

О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГРУППАХ ГОМОЛОГИЧНОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Заварицким 12 II 1951)

Как и пространственная группа симметрии, пространственная группа гомологичности может быть получена посредством сочетания точечной группы с тремя некомпланарными трансляциями. Пусть, например, дана точечная группа гомологичности $2P\,(G_2)\,\Lambda_4\,2\Pi$ (см. рис. 1).

На рис. 1 P_1 и P_2 — две плоскости симметрии, пересекающиеся под прямым углом, Π_1 и Π_2 — две параллельно-сопряженные плоскости гомологичности, Λ_4 — четверная эллиптическая ось гомологичности, перпендикулярная к плоскости чертежа, и G_2 — совпадающая с Λ_4 двойная ось симметрии.

В работе автора ([1]) было доказано, что две пересекающиеся параллельно-сопряженные плоскости гомологичности Π_1 и Π_2 дают равнодействующую двойную ось гомологичности. Так как в данном случае линия пересечения плоскостей гомологичности перпендикулярна к плоскости проектирующих лучей, совпадающей с плоскостью чертежа, то двойная ось гомологичности становится двойной осью симметрии G_2. Добавление к перечисленным элементам двух плоскостей симметрии P_1 и P_2 превращает двойную ось симметрии в четверную эллиптическую ось гомологичности. Выбранная точечная группа может быть названа планальным видом гомологичности тетрагармонии, если под тетрагармонией понимать виды гомологичности, сходственные с видами симметрии тетрагональной сингонии.

Добавим теперь к точечной группе три трансляции так, чтобы две из них были перпендикулярны к Λ_4 и совпадали с плоскостями симметрии P_1 и P_2, а третья шла вдоль Λ_4.

Вертикальная трансляция никаких новых элементов гомологичности и симметрии не даст. Первая же и вторая трансляции t_1 и t_2 приведут к существованию новых элементов симметрии и гомологичности, параллельных заданным.

На рис. 2 исходная точечная группа помещена в пункте O. Трансляции t_1 и t_2 с плоскостями симметрии P_1 и P_2 дадут серию плоскостей симметрии, проходящих параллельно заданным на расстоянии $t_1/2$ от P_1 и $t_2/2$ от P_2 (жирные линии на рис. 2). Эти же трансляции с плоскостями гомологичности Π_1 и Π_2 дадут серии плоскостей гомологичности, параллельных заданным и проходящим через концы трансляции (тонкие сплошные линии на рис. 2) и серию плоскостей скользящей гомологичности (тонкие пунктирные линии).

Дадим для пояснения две теоремы о сложении плоскостей гомологичностей с трансляциями.

Теорема 1. *Равнодействующей плоскости гомологичности* П *и трансляции* t, *совпадающей с направлением проектирующих лучей заданной плоскости, является новая плоскость гомологичности* $П_1$, *параллельная заданной и проходящая через середину трансляции* t.

Возьмем произвольную точку системы A и отразим ее в плоскости гомологичности П, тогда получим новую точку той же системы A_1. Передвинем точку A_1 вдоль направления проектирующих лучей на величину t, получим новую точку A_2. Из рис. 3 ясно, что точку A_2 можно получить из A одним отражением в плоскости гомологичности $П_1$, параллельной заданной, обладающей тем же углом гомологичности μ и проходящей через середину трансляции t.

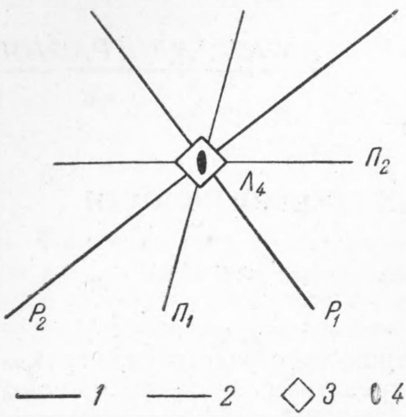

Рис. 1. Точечная группа гомологичности $2P\ (G_2)\ \Lambda_4\ 2П$. *1* — плоскость симметрии P, *2* — плоскость гомологичности П, *3* — четверная ось гомологичности Λ_4. *4* — двойная ось симметрии G_2

Теорема 2. *Равнодействующей плоскости гомологичности* П *и трансляции* t, *косо идущей к направлению проектирующих лучей, является плоскость скользящей гомологичности* σ, *параллельная заданной и проходящая через середину трансляции* t.

Разложим трансляцию t на две: t_1 — параллельную проектирующим лучам и t_2 — параллельную плоскости гомологичности П (см. рис. 4).

Тогда можно написать:

$$П + t = П + t_1 + t_2.$$

Но $П + t_1$, согласно теореме 1, равно новой плоскости гомологичности $П_1$, проходящей через середину t_1. Таким образом:

$$П + t = П + t_1 + t_2 = П_1 + t_2.$$

Так как трансляция t_2 направлена параллельно плоскости гомологичности, то она превратит плоскость гомологичности в плоскость скользящей гомологичности σ, т. е.

$$П + t = \sigma.$$

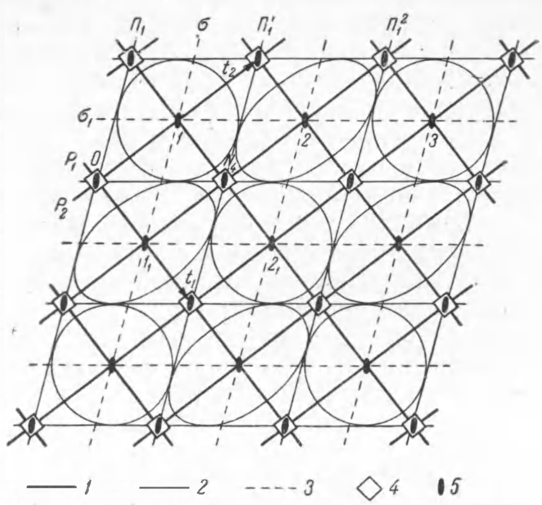

Рис. 2. Пространственная группа гомологичности тетрагармонии $P\Lambda_4\ mm$. *1* — плоскость симметрии $(m)\ P$, *2* — плоскость гомологичности П, *3* — плоскость скользящей гомологичности σ, *4* — четверная ось гомологичности Λ_4, *5* — двойная ось симметрии G.

Выведенная пространственная группа гомологичности может быть записана символом $P\Lambda_4\ mm$, где P означает примитивную трансляционную решетку (или группу трансляций), Λ_4 — четверную ось гомологичности, первое m — плоскость симметрии, перпендикулярную к первой оси координат, и вторая буква m — плоскость симметрии, перпендикулярную ко второй оси координат, (первая и вторая оси координат, соответственно, совпадают с направлением исходных трансляций t_1 и t_2). Таким образом, в символе пространственной группы гомологичности указываются порождающие элементы гомологичности и симметрии.

Пространственная группа гомологичности позволяет вывести правильные системы гомологичных фигур из одной заданной.

Правильной системой гомологичных фигур мы называем такую бесконечную пространственную систему, которая обладает тем свойством, что две ее любые фигуры можно так совместить друг с другом посредством одного или нескольких гомологических преобразований, что при этой операции вся система всеми своими фигурами совместится сама с собой и будет занимать то же самое положение в пространстве, лишь одни ее фигуры совместятся с другими.

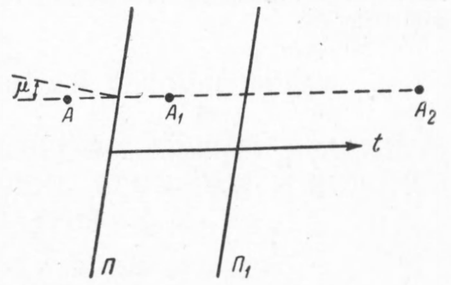

Рис. 3. К доказательству теоремы 1

Все фигуры данной правильной системы гомологичных фигур равны друг другу по объему, но могут, естественно, отличаться по форме. Это следует из того, что при любом гомологическом преобразовании данная фигура переходит в другую, равную ей по объему. На это важное свойство гомологических фигур впервые указал А. В. Шубников ([2]).

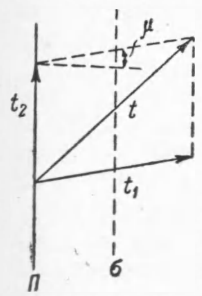

Рис. 4. К доказательству теоремы 2

Пусть на рис. 2 исходная фигура в виде шара помещена своим центром в точке *1*. При отражении шара *1* в плоскости гомологичности Π_1^1 получится эллипсоид *2*, который будет геометрически трехосным эллипсоидом. При отражении эллипсоида *2* в плоскости гомологичности Π_1^2 получится шар *3*. При отражении шара *1* и эллипсоида *2* в плоскости гомологичности Π_2 получим, соответственно, эллипсоид 1_1 и шар 2_1 и т. д.

Четверная эллиптическая ось гомологичности при повороте шара *1* последовательно совмещает его с эллипсоидом *2*, шаром *2*, эллипсоидом 1_1 и, наконец, возвращает его в первоначальное положение *1*.

Плоскость скользящей гомологичности σ при отражении шара *1* превращает его в эллипсоид и перемещает в положение 1_1 и т. д.

С точки зрения симметрии, выведенная выше правильная система гомологичных фигур представляет собой совокупность двух правильных систем равных шаров и равных эллипсоидов, относящихся к пространственной группе симметрии *Pmm* ромбической сингонии.

Ясно, конечно, что посредством растяжения в плоскости P_1, перпендикулярного Λ_4, и сдвига, перпендикулярного Λ_4 и параллельного Π_2, можно вышеописанную правильную систему гомологичных фигур свести к правильной системе эллипсоидов, относящейся к пространственной группе *P4mm* тетрагональной сингонии. Этого же можно добиться изменением угла гомологичности μ для плоскостей гомологичности Π_1 и Π_2, оставляя их параллельно-сопряженными.

Пространственные группы гомологичности и правильные системы гомологичных фигур важны в кристаллографии потому, что они позволяют объединить в одно целое не только фигуры, равные во всех отношениях, но и гомологичные фигуры, т. е. фигуры, равные лишь в некотором определенном смысле.

Ленинградский горный институт

Поступило
11 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Михеев, Тр. Федоровской научн. сессии, 1949 [2] А. В. Шубников, Диссимметрия, Вопросы минералогии, геохимии и петрографии, изд. АН СССР, 1926, стр. 158—163.