Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 5

ГИДРОМЕХАНИКА

В. Г. НЕВЗГЛЯДОВ

ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 5 II 1951)

§ 1. Рассмотрим обтекание пластинки стационарным потоком вязкой жидкости, скорость которого на бесконечности параллельна пластинке. Толщина пластинки бесконечно мала, R — ее длина; ось Ox направим вдоль пластинки и начало совместим с передним краем.

Применим теорию почти безотрывного обтекания [1]. R — та характеристическая длина, которая использована при составлении безразмерных уравнений теории, в частности на нее разделены координаты, таким образом пластинка изображается отрезком оси Ox длины 1.

Возьмем в качестве потока нулевого приближения $\mathbf{u}_0 = \mathbf{e}_x$ — орт по оси Ox, так что потенциал скорости φ и функция тока ψ

$$\varphi = x; \quad \psi = y; \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{e}_x. \tag{1,1}$$

Контур C получаем из двух прямых:

$$y = \lambda; \quad y = -\lambda; \tag{1,2}$$

поток симметричен, достаточно рассмотреть его в верхней полуплоскости. Апроксимация контура C прямыми (1,2) является хорошей везде, кроме близости к переднему краю. Подстановка (1,1) в уравнения теории (3,3) [1] превращает их в уравнения Озеена:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \mathbf{v}; \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{1,3}$$

Решение (1,3) ищем в форме:

$$\mathbf{v} = B\,\mathbf{e}_x + \nabla\left(\Phi - \frac{B}{\mathrm{Re}}\right), \tag{1,4}$$

и для функций B и Φ находим выражения:

$$\left.\begin{aligned} B &= e^{\alpha x}\sum_{n=0}^{\infty} K_n(\alpha r)\,(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta),\\ \Phi &= C_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}(C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta); \end{aligned}\right\} \quad \alpha = \frac{1}{2}\mathrm{Re} \tag{1,5}$$

K_n — бесселева функция от мнимого аргумента (функция Макдональда).

Подстановка (1,5) в (1,4) дает общее решение уравнений Озеена. Для симметрических потоков $B_n = D_n = 0$, и тогда

$$v_x = \frac{1}{2}e^{\alpha x}\sum_{n=0}^{\infty} A_n\Big[K_n(\alpha r)\cos n\theta + \frac{1}{2}K_{n-1}(\alpha r)\cos(n-1)\theta + \\ + \frac{1}{2}K_{n+1}(\alpha r)\cos(n+1)\theta\Big] + \partial\Phi/\partial x, \tag{1,6}$$

$$v_y = \frac{1}{4} e^{\alpha x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[K_{n+1}(\alpha r)\sin(n+1)\theta - K_{n-1}(\alpha r)\sin(n-1)\theta\right] + \partial\Phi / \partial y.$$

Далее находим вихрь и давление:

$$\Omega = \frac{1}{2} \alpha e^{\alpha x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[K_{n+1}(\alpha r)\sin(n+1)\theta - K_{n-1}(\alpha r)\sin(n-1)\theta\right], \tag{1,7}$$

$$p = -C_0 \frac{\cos\theta}{r} - \sum_{n=1}^{\infty} nC_n \frac{\cos(n+1)\theta}{r^{n+1}} + \mathrm{const}. \tag{1,8}$$

Как известно, Озеен использовал решение (1,6) для задачи обтекания цилиндра ползущим потоком, поставив для $\mathrm{Re} < 1$ краевое условие $\mathbf{v} + \mathbf{e}_x = 0$ на цилиндре. Перед нами стоит другая краевая задача: мы будем искать решение задачи обтекания пластинки при любых числах Re, удовлетворяя краевым условиям теории почти безотрывного обтекания.

§ 2. Краевые условия (4,8), (4,9) [1] при учете (1,1) переходят в следующие:

$$v_x - \lambda \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{2}\lambda^2 \frac{\partial v_x}{\partial y^2} = -1 \quad (y = \lambda; \quad 0 < x < 1), \tag{2,1}$$

$$v_y + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} - \frac{1}{3}\lambda^3 \frac{\partial^3 v_x}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (y = \lambda; \quad 0 < x < 1). \tag{2,2}$$

Будем приближенно удовлетворять условиям (2,1) и (2,2), ограничившись небольшим числом постоянных в общем интеграле (1,6). Составим для больших чисел $\mathrm{Re} = 2\alpha$ приближенно условия (2,1), (2,2) в области

$$\lambda \ll x < 1 \tag{2,3}$$

в предположении, что

$$\alpha\lambda \gg 1; \quad \alpha\lambda^2 \sim 1. \tag{2,4}$$

Учитывая асимптотические выражения для K_n, а также малость θ при $y = \lambda$ и $x \gg \lambda$, можно положить все $A_n = 0$, кроме A_0, после чего из (1,6) в предположении (2,3) и (2,4) получаем:

$$v_x \cong -A \frac{e^{-\alpha\lambda^2/2x}}{(2x)^{1/2}} + \frac{C_0}{x} - \frac{C_1}{x^2} - \dots - \frac{nC_n}{x^{n+1}}, \tag{2,5}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \cong A 2\alpha\lambda \frac{e^{-\alpha\lambda^2/2x}}{(2x)^{3/2}}; \qquad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \cong -A 4\alpha \frac{e^{-\alpha\lambda^2/2x}}{(2x)^{5/2}} (\alpha\lambda^2 - x);$$

$$\Omega \cong -\frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (x \gg \lambda; \quad y = \lambda). \tag{2,6}$$

Здесь обозначено: $A_0 \sqrt{\pi / \alpha} \equiv -A$.

В (2,5) число коэффициентов C_n не может быть взято большим в силу сделанных пренебрежений. Подставляя (2,5) в (2,1), получаем краевое условие в следующем простом виде:

$$Af(x) = F(x), \tag{2,7}$$

где обозначено

$$f(x) \equiv \frac{e^{-\alpha\lambda^2/2x}}{\sqrt{2x}} \left[1 + \frac{\alpha\lambda^2}{2x} + 2\left(\frac{\alpha\lambda^2}{2x}\right)^2 \right];$$

$$F(x) \equiv 1 + \frac{C_0}{x} - \frac{C_1}{x^2} - \cdots - \frac{nC_n}{x^{n+1}}. \tag{2,8}$$

Краевое условие (2,2) получаем в виде:

$$\lambda \{\text{выражение порядка } v_x\} = 0. \tag{2,9}$$

В силу малости λ, можно условие (2,9) считать приближенно выполненным, если $|v_x| < 1$. Краевое условие (2,7) должно быть хорошо выполнено в средней части пластинки, поэтому мы можем постоянные интеграции определить из системы:

$$A(f)_{x=1/2} = (F)_{x=1/2};$$

$$A\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=1/2} = \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=1/2}; \ldots; A\left(\frac{d^k f}{dx^k}\right)_{x=1/2} = \left(\frac{d^k F}{dx^k}\right)_{x=1/2}. \tag{2,10}$$

Ограничившись тремя постоянными A, C_0 и C_1, определим их из трех уравнений (2,10):

$$A = e^{\varkappa}[{}^3/_8(1+\varkappa) + {}^3/_4\varkappa^2 - {}^5/_2\varkappa^3 + \varkappa^4]^{-1}, \quad \varkappa = \alpha\lambda^2,$$

$$2C_0 = Ae^{-\varkappa}[{}^3/_4(1+\varkappa) - {}^3/_2\varkappa^2 + 7\varkappa^3 - 2\varkappa^4],$$

$$4C_1 = Ae^{-\varkappa}[{}^1/_8(1+\varkappa) - {}^{11}/_4\varkappa^2 + {}^9/_2\varkappa^3 - \varkappa^4].$$

Мы получили семейство решений, зависящее от одного параметра $\varkappa = \alpha\lambda^2$ (это приближенное решение пригодно для области потока $x \gg \lambda$); рассмотрение его показывает, что можно получить $0 > v_x > -0{,}85$ во всем интервале при $\varkappa \equiv \alpha\lambda^2 = 4{,}3$; при этом получаем:

$$A = 0{,}466; \quad 2C_0 = -0{,}957; \quad 4C_1 = -0{,}22; \quad \lambda = \sqrt{8{,}6/\mathrm{Re}}. \tag{2,11}$$

§ 3. Коэффициент сопротивления c_x получаем из (5,5) ([1]) в виде:

$$c_x = -\frac{2}{\mathrm{Re}} \int_{\substack{-\infty \\ y=\lambda}}^{\infty} \Omega\, dx; \tag{3,1}$$

подставляя сюда Ω из (1,7), при одной постоянной A_0, получаем:

$$c_x = -A_0\lambda I(\alpha); \quad I(\alpha) \equiv \int_{\substack{-\infty \\ y=\lambda}}^{\infty} e^{\alpha x} K_1(\alpha r)\frac{dx}{r}. \tag{3,2}$$

Формула (3,2) справедлива при любых значениях Re. Вычисляя интеграл $I(\alpha)$ при больших Re, получаем $I(\alpha) \simeq \pi/\alpha\lambda$, и тогда (3,2) принимает простую форму:

$$c_x = -A_0\pi/\alpha \quad (\alpha \gg 1); \tag{3,3}$$

заменяя здесь A_0 на A и используя (2,11), получаем:

$$c_x = 1{,}17/\sqrt{\mathrm{Re}}. \tag{3,4}$$

Сравним наш результат с формулой Блазиуса ([2]), которую он получил посредством численного интегрирования уравнений пограничного слоя Прандтля. Формула Блазиуса имеет тот же вид, что (3,4), только в числителе стоит число 1,328.

§ 4. При малых числах Рейнольдса, вычисляя интеграл $I(\alpha)$, можно $e^{\alpha x}$ разложить в ряд Тейлора, и тогда получаем:

$$I(\alpha) \simeq (2\pi/\alpha\lambda)^{1/2}(1 + {}^1/_2\alpha\lambda)K_{1/2}(\alpha\lambda) \tag{4,1}$$

в пренебрежении $(\alpha\lambda)^2$ сравнительно с 1, и далее, в том же приближении функция Макдональда:

$$K_{1/2}(\alpha\lambda) \cong (\pi / 2\alpha\lambda)^{1/2} e^{-\alpha\lambda} \cong (\pi / 2\alpha\lambda)^{1/2} (1 - \alpha\lambda);$$

таким образом, c_x из (3,2) получаем в виде:

$$c_x = -\frac{A_0\pi}{\alpha}(1 - {}^1/_2\,\alpha\lambda) \quad (\alpha < 1). \tag{4,2}$$

Коэффициент сопротивления (4,2) имеет почти тот же вид, что и формула (3,3), однако постоянные A_0 в них различно зависят от α. При малых α, удовлетворяя приближенно краевым условиям (2,1) с помощью трех постоянных A_0, C_0 и C_1, мы получим: $A_0 \cong \frac{2(1-\alpha\lambda)}{\ln(\alpha\lambda) - 0{,}5 - 0{,}6\,\alpha\lambda}$, и подстановка в (4,2) дает:

$$c_x \cong \frac{8\pi}{\mathrm{Re}\,[1 - 2\ln(\alpha\lambda)]}. \tag{4,3}$$

Параметр λ здесь надо взять $\sim {}^1/_2$ для $\mathrm{Re} \sim 1$; при этом выполняется условие $0 > v_x > -0{,}8$ во всем внешнем потоке, включая контур C.

Полученный коэффициент сопротивления (4,3) дает для R_x' — силы, действующей на единицу высоты пластинки, следующее выражение:

$$R_x' \cong \frac{8\pi u_\infty k}{1 - 2\ln(\alpha\lambda)}. \tag{4,4}$$

Такой же вид имеет c_x и R_x' при обтекании ползущим потоком цилиндра в решении Озеена. Таким образом, мы получили следующий результат: плоский ползущий поток ($\mathrm{Re} < 1$) действует с одинаковой силой на единицу высоты цилиндрического тела, имеющего форму цилиндра и форму пластинки, а именно, эта сила пропорциональна скорости потока на бесконечности и k — коэффициенту вязкости. Этот результат с качественной стороны обладает полной убедительностью.

Отметим в заключение: теория почти безотрывного обтекания дает полное решение задачи обтекания пластинки для всех значений чисел Re, дает не только коэффициент сопротивления c_x, но и поле скоростей $\mathbf{v}$ и давление p, тогда как теория Прандтля дает только c_x — численным интегрированием и только для больших Re. Отметим еще, что наша асимптотическая для больших Re формула (3,4), совпадающая с формулой Блазиуса, дает, как известно, хорошее совпадение с данными опыта при не слишком больших Re (до $3 \cdot 10^5$); отклонения данных опыта от (3,4) для $\mathrm{Re} > 3 \cdot 10^5$ надо понимать как отклонение действительного потока от модели почти безотрывного обтекания, т. е. надо отнести за счет возрастающего значения турбулентного следа (спутной струи) за телом.

Нами получено более точное решение (пригодное для всего потока, также и для $x < 0$) при 4 постоянных интеграции, при этом в числителе (3,4) стоит 1,36; далее получено общее решение уравнений (3,3) [1] и применение его к обтеканию тонких профилей.

Коэффициент сопротивления тонких профилей состоит из двух слагаемых — коэффициента сопротивления формы и коэффициента сопротивления трения, последний получается такого же вида, как и для пластинки.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
27 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Невзглядов, ДАН, 77, № 4 (1951). [2] Н. Е. Кочин, Теоретическая гидромеханика, 1948, стр. 454.