Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 5

МАТЕМАТИКА

И. КУБИЛЮС

О РАЗЛОЖЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ НА ДВА КВАДРАТА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 16 II 1951)

Пусть $\lambda(x)$ — некоторая положительная функция от $x>0$. Обозначим через $I(x, \lambda(x))$ число решений уравнения $k^2+l^2=p$, где k, l — целые, p — простое, удовлетворяющих условиям: $p \leqslant x$, $0 < l \leqslant \lambda(x)$.

Хорошо известно, что существует бесконечно много простых чисел, представимых в виде суммы двух квадратов. Следовательно, $I(x, {}^1/_2\, x^{1/2}) \to \infty$ при $x \to \infty$. В предположении, что верна расширенная гипотеза Римана для всех Z-функций Гекке поля $K(i)$, гласящая, что все эти функции не имеют нулей в области $\sigma > {}^1/_2$, можно показать, что $I(x, c_1 \ln^2 x) \to \infty$ при $x \to \infty$, где c_1 — абсолютная постоянная. Имеется предположение (Ландау), что $I(x, 1) \to \infty$ при $x \to \infty$.

Область отсутствия нулей в критической полосе у функций Гекке поля $K(i)$, которую можно указать в настоящее время, настолько узка, что представляется возможность получить непосредственно лишь $I\{x, x^{1/2} \exp(-c_2 \ln^\theta x)\} \to \infty$ при $x \to \infty$, где c_2 и θ — абсолютные постоянные, ${}^1/_2 < \theta < 1$.

Но оказывается, что метод, разработанный Ю. В. Линником применительно к L-функциям Дирихле, основанный на том факте, что вблизи прямой $\sigma = 1$ может иметь нули лишь сравнительно небольшое количество L-функций, и позволяющий обойти расширенную гипотезу Римана в некоторых вопросах теории чисел, дает возможность показать, что $I(x, x^{7/16+\varepsilon}) \to \infty$ при $x \to \infty$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$.

Доказательство несколько более общей теоремы, из которой следует, в частности, последнее утверждение, и составляет содержание настоящей заметки.

Мы рассмотрим мнимое квадратичное поле K и будем полагать, что оно расширено, следуя Гекке ([1]), до области идеальных чисел данного поля. Условимся в некоторых обозначениях: $\hat{\alpha}$, $\hat{\delta}$ — целые; $\hat{\pi}$ — простые идеальные числа; $N(\hat{\alpha})$ — норма числа $\hat{\alpha}$; g — число единиц поля K; $\mu(\hat{\alpha})$, $\Lambda(\hat{\alpha})$ — соответственно функции Мёбиуса и Мангольдта; $\tau(\hat{\alpha})$ — число неассоциированных делителей $\hat{\alpha}$; $\xi(\hat{\alpha}) = \exp(i \arg \hat{\alpha})$ — характер Гекке; $s = \sigma + it$; m — целое рациональное; $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое фиксированное число; символы O, $\ll$ и положительные постоянные $c_3, \ldots, c_{11}$ зависят только от K и, быть может, от ε; $Z(s, m)$ — функция Гекке, определяемая рядом

$$Z(s, m) = \frac{1}{g} \sum_{\hat{\alpha} \neq 0} \xi^{gm}(\hat{\alpha}) N(\hat{\alpha})^{-s}$$

в полуплоскости его сходимости.

Пользуясь оценками сумм Вейля, полученными И. М. Виноградовым ([2,3]), можно показать (ср. ([4])), что функции $Z(s, m)$, $|m| \leqslant M$, где $M \geqslant 2$, не имеют нулей в областях

$$0 \leqslant \sigma \leqslant \omega_0, \quad |t| \leqslant \ln^2 M; \qquad 1 - \omega_0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t| \leqslant \ln^2 M, \tag{1}$$

где $\omega_0 = c_3 \ln^{-\theta_1} M$, $0 < \theta_1 < 1$ — абсолютная постоянная. Это обстоятельство существенно упрощает применение «плотностного» метода.

Теорема 1. *Пусть* $\omega < 1$. *Обозначим через* $Q(\omega)$ *количество функций* $Z(s, m)$, $|m| \leqslant M$, $M \geqslant 2$, *имеющих хотя бы один нуль в прямоугольнике* $R(\omega)$: $\omega \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant \ln^2 M$. *Утверждается:*

$$Q(\omega) \ll M^{(16+\varepsilon)(1-\omega)}.$$

Доказательство. Теорему достаточно доказать для $^{15}/_{16} \leqslant \omega < \omega_0$. Положим: $u = M^{4+0{,}04\varepsilon}$, $v = M^{16/3+0{,}08\varepsilon}$,

$$a(\hat{\alpha}) = \sum_{\substack{\hat{\delta} \setminus \hat{\alpha} \\ N(\hat{\alpha}) > u}} \mu(\hat{\delta}), \quad S(m, v, s) = \sum_{u < N(\hat{\alpha}) \leqslant v} \xi^{gm}(\hat{\alpha})\, a(\hat{\alpha})\, N(\hat{\alpha})^{-s}.$$

Имеет место оценка

$$H(x, m) = \sum_{1 \leqslant N(\hat{\alpha}) \leqslant x} \xi^{gm}(\hat{\alpha}) \ll |m| \ln(|m| + e) + |m|^{\varepsilon} x^{1/2+\varepsilon} \text{ при } m \neq 0.$$

Для $m \neq 0$, $\sigma > 1/2 + \varepsilon$ имеем

$$\sum_{1 \leqslant N(\hat{\alpha}) \leqslant x} \xi^{gm}(\hat{\alpha})\, N(\hat{\alpha})^{-s} = Z(s, m) - s \int_x^{\infty} H(y, m)\, y^{-1-s}\, dy + H(x, m)\, x^{-s}.$$

Пусть теперь функция $Z(s, m)$, $0 < |m| \leqslant M$, имеет нуль $\rho = \beta + i\gamma$ в прямоугольнике $R(\omega)$. Тогда

$$\sum_{1 \leqslant N(\hat{\alpha}) \leqslant x} \xi^{gm}(\hat{\alpha})\, N(\hat{\alpha})^{-\rho} \ll (M x^{-\beta} + M^{\varepsilon} x^{1/2-\beta+\varepsilon}) \ln^3 M.$$

В таком случае

$$\left| \sum_{1 \leqslant N(\hat{\alpha}) \leqslant u} \mu(\hat{\alpha})\, \xi^{gm}(\hat{\alpha})\, N(\hat{\alpha})^{-\rho} \sum_{1 \leqslant N(\hat{\delta}) \leqslant \frac{v}{N(\hat{\alpha})}} \xi^{gm}(\hat{\delta})\, N(\hat{\delta})^{-\rho} \right| \leqslant c_4 M^{-0{,}03\varepsilon} < \frac{1}{2} g^2$$

для достаточно большого M, что, в силу тождества

$$\sum_{1 \leqslant N(\hat{\alpha}) \leqslant v} \mu(\hat{\alpha})\, \xi^{gm}(\hat{\alpha})\, N(\hat{\alpha})^{-\rho} \sum_{1 \leqslant N(\hat{\delta}) \leqslant \frac{v}{N(\hat{\alpha})}} \xi^{gm}(\hat{\delta})\, N(\hat{\delta})^{-\rho} = g^2,$$

приводит нас к неравенству

$$|S(m, v, \rho)| > {}^1/_2\, g^2.$$

Отсюда частичным суммированием можно убедиться, что в наших предположениях существует $v_{1m} \in [u, v]$ такое, что

$$|S(m, v_{1m}, \omega)| > c_5 \ln^{-3} M.$$

Последнее неравенство позволяет показать (ср. ([5]), § 11), что существует более чем $c_6 Q(\omega) v^{\omega-1} \ln^{-5} M$ целых рациональных m из промежутка $-M \leqslant m \leqslant M$ и общее для всех них число $v_2 \in [u, v]$ таких, что $|S(m, v_2, \omega)| > c_7 \ln^{-3} M$.

Рассмотрим сумму

$$S_1 = \sum_{|m| \leqslant M}^{*} |S(m, v_2, \omega)|^2,$$

где сумма берется по m, обладающим только что указанным свойством. Имеем

$$S_1 \geqslant c_7' Q(\omega)\, v^{\omega-1} \ln^{-11} M. \qquad (2)$$

С другой стороны,

$$S_1 \leqslant \sum_{|m| \leqslant M} |S(m, v_2, \omega)|^2 \ll$$

$$\ll \sum_{u < N(\hat\alpha) \leqslant v} \ \sum_{u < N(\hat\delta) \leqslant v} \tau(\hat\alpha)\,\tau(\hat\delta)\, N(\hat\alpha\hat\delta) \min\left(M, \frac{1}{\left(\frac{g(\arg\hat\alpha - \arg\hat\delta)}{2\pi}\right)}\right).$$

Можно показать, что

$$\sum_{\substack{1 \leqslant N(\hat\alpha) \leqslant x \\ \varphi_1 < \arg\hat\alpha \leqslant \varphi_2}} \tau(\alpha) = x(c_8 \ln x + c_9)(\varphi_2 - \varphi_1) + O(x^{3/4+\varepsilon_1}).$$

Применяя это соотношение, находим:

$$S_1 \ll v^{2(1-\omega)} \ln^3 M.$$

Последняя оценка и (2) доказывают теорему.

Теорема 2. *Пусть φ_1, φ_2 — вещественные числа, $0 \leqslant \varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 2\pi$. Тогда*

$$\sum_{\substack{N(\hat\pi) < x \ln x \\ \varphi_1 < \arg\hat\alpha \leqslant \varphi_2}} \ln N(\hat\pi)\, e^{-N(\hat\pi)/x} = \frac{gx}{2\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)(1 + o(1)) + O(x^{15/16+\varepsilon}).$$

Доказательство. Теорему достаточно доказать для $0 \leqslant \varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 0{,}1\,\pi$. Пусть $x \geqslant x_0(\varepsilon)$. Положим $r = [\ln x]$, $M = x^{1/16 - \frac{\varepsilon}{2}}$, $\Delta = x^{-1/16+\varepsilon}$,

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{\substack{\hat\alpha \neq 0 \\ \varphi_1 < \arg\hat\alpha \leqslant \varphi_2}} \Lambda(\hat\alpha)\, e^{-N(\hat\alpha)/x},$$

Согласно одной лемме И. М. Виноградова ((6), гл. I, лемма 12), можно построить периодическую с периодом $2\pi/g$ функцию $f(\varphi)$, обладающую свойствами

$f(\varphi) = 1$ в интервале $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$

$0 \leqslant f(\varphi) \leqslant 1$ в интервале $\varphi_1 - \Delta \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1$, $\varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 + \Delta$,

$f(\varphi) = 0$ в интервале $\varphi_2 + \Delta \leqslant \varphi \leqslant \frac{2\pi}{g} + \varphi_1 - \Delta$,

$$f(\varphi) - \sum_{|m| \leqslant M} a_m e^{igm\varphi} \ll \left(\frac{c_{10}\, r}{M\Delta}\right)^r \ll x^{-2},$$

где

$$a_0 = \frac{g}{2\pi}(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta), \qquad |a_m| \leqslant \min\left\{\frac{g}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta), \frac{2}{\pi|m|}\right\}. \qquad (3)$$

Тогда имеем

$$W(\varphi_1, \varphi_2) \leqslant \Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{\hat{\alpha} \neq 0}' f(\arg \hat{\alpha}) \Lambda(\hat{\alpha}) e^{-N(\hat{\alpha})/x} =$$

$$= \sum_{|m| \leqslant M} a_m \sum_{\hat{\alpha} \neq 0}' \xi^{gm}(\hat{\alpha}) \Lambda(\hat{\alpha}) e^{-N(\hat{\alpha})/x} + O(1),$$

где штрих указывает, что суммирование происходит по неассоциированным числам. Применяя оператор Меллина, внутреннюю сумму выражаем через нули функции $Z(s, m)$. Получаем

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{gx}{2\pi}(\varphi_2 - \varphi_1) - \sum_{|m| \leqslant M} a_m \sum_{|\gamma_m| < \ln^2 M} \Gamma(\rho_m) x^{\rho_m} + O(x^{15/16+\varepsilon}), \quad (4)$$

где внутренняя сумма берется по нулям $\rho_m = \beta_m + i\gamma_m$ функции $Z(s, m)$, лежащим в прямоугольнике $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| < \ln^2 M$. Но число таких нулей при $|m| \leqslant M$ является величиной $\ll \ln^3 M$. На основании этого, принимая в расчет (1), (3) и теорему 1, находим для двойной суммы в (4) оценку

$$\ll (\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta) \ln^4 x \cdot \left\{ \ln x \cdot \int_{\omega_0}^{1-\omega_0} Q(\omega) x^{\omega} d\omega + Q(\omega_0) x^{\omega_0} \right\} \ll$$

$$\ll (\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta) \ln^4 x \cdot \{x^{1-7\varepsilon\omega_0} \ln x + M x^{\omega_0}\} = (\varphi_2 - \varphi_1) o(x) + O(x^{15/16+\varepsilon}).$$

Следовательно,

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{gx}{2\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)(1 - o(1)) + O(x^{15/16+\varepsilon}),$$

откуда следует теорема.

Из теоремы 2 следует, в частности, что при $x \geqslant x_0(\varepsilon)$ существует простое идеальное число $\hat{\pi}$, удовлетворяющее условиям

$$N(\hat{\pi}) \leqslant x, \quad 0 < \arg \hat{\pi} \leqslant x^{-1/16+\varepsilon},$$

то в случае поля $K(i)$ эквивалентно утверждению

$$I(x, x^{7/16+\varepsilon}) \to \infty \text{ при } x \to \infty.$$

Этот результат можно несколько улучшить.

Заметим, что если бы мы смогли в теореме 1 постоянную $16 + \varepsilon$ заменить через 2, то это дало бы $I(x, c_{11} \ln^2 x) \to \infty$ при $x \to \infty$, т. е. тот же результат, что и гипотеза Римана.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность проф. Ю. В. Линнику за постановку задачи и ценные указания.

Поступило
15 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Hecke, Math. Zs., 16, 11 (1920). [2] И. М. Виноградов, Изв. АН СССР, сер. матем., № 5—6, 505 (1938). [3] И. М. Виноградов, там же, 14, 199 (1950). [4] Н. Г. Чудаков, Матем. сборн., 19 (61): 1, 47 (1946). [5] Ю. В. Линник, там же, 15 (57): 1, 3 (1944). [6] И. М. Виноградов, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 23 (1947).