Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 5

МАТЕМАТИКА

Т. И. КРАСНОЩЕКОВА

ОДНА ТЕОРЕМА О РЯДАХ ПО ПОЛИНОМАМ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 13 II 1951)

Пусть односвязная область G ограничена жордановой кривой C и функция

$$w = \varphi(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \ldots$$

отображает взаимно-однозначно и конформно область, внешнюю к кривой C, на область $|w| > r$. Тогда r является трансфинитным диаметром области G.

Обозначим через C_R кривую в плоскости z, которая при отображении $w = \varphi(z)$ переходит в окружность $|w| = R > r$, и через G_R — внутреннюю к ней область. Очевидно, трансфинитный диаметр области G_R равен R.

Будем рассматривать последовательность полиномов $P_0(z), P_1(z), \ldots, P_n(z), \ldots$, где $P_n(z) = z^n + \ldots + a_0^{(n)}$, для которых выполнено следующее условие: при всяком n и $R > r$ для точек z, лежащих на C_R, $|P_n(z)| < M(R+\varepsilon)^n$, где M — постоянная, зависящая от C_R и ε, а $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z)$ с коэффициентами c_n, для которых $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n} = \frac{1}{\rho}$ $(\rho > r)$, сходится, как легко видеть, внутри C_ρ, и притом сходимость равномерна в каждой замкнутой области, лежащей внутри C_ρ.

Лемма. *Если какая-нибудь последовательность полиномов возрастающих степеней $P_{n_1}(z), P_{n_2}(z), \cdots, P_{n_k}(z), \ldots$ $(n_1 < n_2 < \cdots)$, где $P_{n_k}(z) = c_{n_k}^{(n_k)} z^{n_k} + \cdots + c_0^{(n_k)}$ $(c_{n_k}^{(n_k)} \neq 0)$, сходится в области G, причем равномерно в каждой внутренней замкнутой области, то*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |c_{n_k}^{(n_k)}|^{1/n_k} \leqslant \frac{1}{r}.$$

Доказательство. Пусть $\{G_n\}$ — последовательность вложенных областей $(\overline{G}_n \subset G_{n+1})$ с жордановыми границами, сходящаяся к области G. Обозначим через $\{T_n^{(n)}(z)\}$ последовательность полиномов Чебышева, соответствующих замкнутой области $\overline{G}_n$, и $m_n^{(n)} = \max |T_n^{(n)}(z)|$ в $\overline{G}_n$.

Последовательность $\{P_{n_k}(z)\}$ сходится равномерно в $\overline{G}_n$, поэтому $\max\limits_{(\overline{G}_n)} |P_{n_k}(z)| < A$ для всех k. С другой стороны, в $\overline{G}_n$ имеем:

$$\max |P_{n_k}(z)| = |c_{n_k}^{(n_k)}| \max \left| z^{n_k} + \cdots + \frac{c_0^{(n_k)}}{c_{n_k}^{(n_k)}} \right| \geqslant$$

$$\geqslant |c_{n_k}^{(n_k)}| \max |T_{n_k}^{(n)}(z)| = |c_{n_k}^{(n_k)}| m_{n_k}^{(n)}.$$

Из сравнения двух неравенств получаем $|c_{n_k}^{(n_k)}|\, m_{n_k}^{(n)} < A$ для всех k, т. е.

$$|c_{n_k}^{(n_k)}|^{1/n_k} < \frac{A}{\sqrt[n_k]{m_{n_k}^{(n)}}}.$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, |c_{n_k}^{(n_k)}|^{1/n_k} \leqslant \frac{1}{r_n},$$

где r_n — трансфинитный диаметр области G_n.

Переходя к пределу в предшествующем соотношении, получим окончательно:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, |c_{n_k}^{(n_k)}|^{1/n_k} \leqslant \frac{1}{r}.$$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z)$ $\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, |c_n|^{1/n} = \frac{1}{\rho},\ \rho > r\right)$.

Теорема. *Изменяя знаки коэффициентов ряда, можно получить ряд, представляющий аналитическую функцию, областью существования которой является* G_ρ, *т. е. существует ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n c_n P_n(z)$, *где* ε_n *принимает значение* $+1$ *или* -1, *для которого* C_ρ *является естественной границей.*

Эта теорема является распространением теоремы Фату на ряды рассматриваемого вида. Доказательство этой теоремы проводится так же, как доказательство теоремы Фату, которое дал Гурвиц ([1]). При этом используется распространение на эти ряды теоремы Адамара — Островского о пропусках, полученное в работе С. Я. Альпера ([2]), и сформулированная выше лемма.

Доказательство. Пусть дан ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z) \quad \left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |c_n \quad = \frac{1}{\rho}\right);$$

из него образуем ряд

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k} P_{n_k}(z) \quad \left(\lim_{k\to\infty} |c_{n_k}|^{1/n_k} = \frac{1}{\rho}\right)$$

с пропусками, удовлетворяющими условию:

$$\frac{n_{k+1} - n_k}{n_k} \geqslant \theta > 0.$$

Обозначим члены ряда $f(z)$, не вошедшие в $F(z)$, через $f_0(z)$, т. е. положим $f(z) = f_0(z) + F(z)$.

Ряд $F(z)$ представим в виде суммы бесконечных рядов так, чтобы каждый член ряда $F(z)$ вошел только в один ряд и все члены были исчерпаны. Пусть этим представлением будет

$$F(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots,$$

тогда

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

Рассмотрим всевозможные ряды

$$f_\varepsilon(z) = f_0(z) + \varepsilon_1 f_1(z) + \varepsilon_2 f_2(z) + \ldots + \varepsilon_n f_n(z) + \ldots,$$

где ε_n принимает значение $+1$ или -1.

Существует, по крайней мере, один ряд $f_\varepsilon(z)$, для которого граница G_ρ является естественной границей. Допустим противное: тогда каждому ряду соответствует система дуг на C_ρ, на которых функция, представленная этим рядом, аналитична. Множество таких непересекающихся систем дуг счетно, тогда как множество рядов рассматриваемого вида имеет мощность континуума. Следовательно, существуют два ряда:

$$f_\varepsilon(z) = f_0(z) + \varepsilon_1 f_1(z) + \varepsilon_2 f_2(z) + \ldots$$

и

$$f_{\varepsilon'}(z) = f_0(z) + \varepsilon_1' f_1(z) + \varepsilon_2' f_2(z) + \cdots$$

таких, что $f_\varepsilon(z)$ и $f_{\varepsilon'}(z)$ имеют на C_ρ общие точки аналитичности.

Но тогда ряд

$$f_\varepsilon(z) - f_{\varepsilon'}(z) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_1') f_1(z) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_2') f_2(z) + \cdots$$

является сходящимся в окрестности этих точек за границу области G_ρ, т. е. существует область $B \supset G_\rho$ с трансфинитным диаметром $\rho' > \rho$, в которой ряд сходится, причем равномерно в каждой замкнутой внутренней области.

Тогда, по лемме, $\frac{1}{\rho} = \lim\limits_{k\to\infty} |c_{n_k}|^{1/n_k} \leqslant \frac{1}{\rho'}$, т. е. $\rho \geqslant \rho'$ — противоречие.

Отметим, что эта теорема имеет место для рядов по полиномам Фабера, Чебышева, Абеля — Гончарова, ортогональным и др. В частности, если область G ограничена аналитической кривой C, то всегда можно получить функцию, аналитическую в области G, для которой C является естественной границей.

Для этого в качестве полиномов $\{P_n(z)\}$ можно взять, например, полиномы Чебышева или Фабера, соответствующие этой области, и рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z)$ $\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n} = \frac{1}{r}\right)$.

На основании доказанной теоремы, которая применима в силу аналитической продолжаемости функции $w = \varphi(z)$ внутрь области G, можно получить ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n c_n P_n(z)$, представляющий аналитическую функцию, областью существования которой будет область G.

Поступило
13 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Hurwitz u. G. Polya, Acta Mathem., **40**, 179 (1916). [2] С. Я. Альпер, ДАН, **59**, № 4 (1948).