Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 5

МАТЕМАТИКА

В. И. ГУКЕВИЧ

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНАМИ В СРЕДНЕМ ФУНКЦИИ $\ln(a-x)$

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 13 II 1951)

С. М. Никольский (1) исследовал асимптотические свойства наилучшего приближения многочленами в среднем функции $|a-x|^s$. В настоящей заметке используется примененный им метод для получения асимптотической формулы величины наилучшего приближения многочленами в среднем функции $\ln|a-x|$, когда a находится внутри отрезка приближения. Случаи, когда a находится на конце или вне отрезка, уже рассмотрены Н. И. Ахиезером (3).

Пусть $R_n(x)$ — многочлен степени n, дающий наилучшее приближение в среднем функции $f(x)$ многочленами степени n на отрезке $[-1,1]$, т. е. многочлен, для которого

$$E_n[f(x);-1,1]_L=\int_{-1}^{1}|f(x)-R_n(x)|\,dx=\min\int_{-1}^{1}|f(x)-P_n(x)|\,dx,$$

где минимум распространяется на всевозможные многочлены $P_n(x)$ степени не выше n.

Рассмотрим наилучшее приближение многочленами в среднем функции $\ln|a-x|$. Предполагая сначала, что a имеет вид $a=\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n+1}$ $(m=1,2,\ldots,2n)$ и удовлетворяет неравенству $0\leqslant a\leqslant\eta$, где $0<\eta<1$, строим для функции $\ln|a-x|$ комплексный интерполяционный многочлен $R^*_{2n-1}(x)$ степени $2n-1$ с узлами интерполяции в точках $x_k=\cos\frac{k\pi}{2n+1}$ $(k=1,2,\ldots,2n)$. Действительная часть комплексного многочлена $R_{2n-1}(x)$ интерполирует в тех же узлах интерполяции функцию $\ln|a-x|$. Используя формулу Эрмита для остаточного члена интерполяции и принимая за C контур, состоящий из окружности бесконечно большого радиуса с центром в нуле, окружности бесконечно малого радиуса с центром в a и разреза, идущего от точки a вдоль кривой K, описываемой уравнением $z=\cos(\alpha-i\beta)$ $(\alpha=\arccos a,\ 0\leqslant\beta\leqslant\infty)$, получаем

$$\ln|a-x|-R^*_{2n-1}(x)=\frac{\theta_{2n}(x)}{2\pi}\int_C\frac{\ln(a-z)\,dz}{(z-x)\,\theta_{2n}(z)}=\theta_{2n}(x)\int_K\frac{dz}{(z-x)\,\theta_{2n}(x)},$$

где $\theta_{2n}(z)=\frac{\sin(2n+1)\arccos z}{2^{2n}\sqrt{1-z^2}}$ и z пробегает кривую K от точки a до ∞. Оценивая действительную часть последнего выражения, устанавливаем

$$\int_{-1}^{1}|\ln|a-x|-R_{2n-1}(x)|\,dx=$$

$$= \frac{2\sqrt{1-a^2}}{(2n+1)^2} \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{\infty} \frac{|\cos (2n+1)(\theta-\alpha)|\, u\, du}{\left[(\theta-\alpha)^2 + \frac{u^2}{(2n+1)^2}\right](e^u+e^{-u})} + O(\ln n/n^2). \qquad (1)$$

Дальше показываем, что построенный действительный интерполяционный многочлен $R_{2n-1}(x)$ является асимптотически наилучшим в среднем для функции $\ln|a-x|$ на отрезке $[-1, 1]$, а именно, что

$$E_{2n-1}[\ln|a-x|; -1, 1]_L = \int\limits_{-1}^{1} |\ln|a-x| - R_{2n-1}(x)|\, dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \qquad (2)$$

Отсюда, исходя из формулы (1), приходим к следующему асимптотическому выражению для величины наилучшего приближения в среднем функции $\ln|a-x|$ на отрезке $[-1, 1]$:

$$E_{2n-1}[\ln|a-x|; -1, 1] = \frac{2\sqrt{1-a^2}}{n} \int\limits_0^{\infty} \frac{u\,|\cos v|\, du\, dv}{(v^2+u^2)(e^u+e^{-u})} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \qquad (3)$$

Отметим, что наилучшее приближение функции $|a-x|^s$, как это видно из работы С. М. Никольского ([1]), выражается интегралом того же типа, что и фигурирующий в формуле (3) интеграл

$$E_n[|a-x|^s, -1, 1] = \frac{8\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|(1-a^2)^{\frac{s+1}{2}}}{\pi\, n^{s+1}} \int\limits_0^{\infty} |\cos v| \int\limits_0^{\infty} \frac{u^{s+1}\, du\, dv}{(v^2+u^2)(e^u+e^{-u})} +$$
$$+ O(\ln (n/n^{s+1}).$$

Формула обобщается на случай произвольного a, удовлетворяющего неравенству $|a| \leqslant \eta$, где $0 < \eta < 1$, с помощью леммы, которая является перенесением на случай функции $\ln|a-x|$ одной леммы С. М. Никольского (([3]), стр. 145). Заслуживает внимания то обстоятельство, что найденный нами порядок $O(1/n)$ наилучшего приближения в среднем функции $\ln|x|$ на отрезке $(-1, +1)$, несмотря на то, что она бесконечна при $x=0$, тот же, что и у ограниченных функций, даже имеющих ограниченную вариацию (см. ([2]), теорема 1). Там же доказывается теорема, которая является перенесением на приближения в среднем известной теоремы С. Н. Бернштейна (([4]), стр. 75).

Теорема. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы непрерывная и вещественная на отрезке $[-1, 1]$ функция $f(x)$ совпадала на этом отрезке с функцией $\varphi(x)$, аналитической внутри эллипса с фокусами в $-1, 1$ и полусуммой осей, равной R $(R > 1)$, и имеющей особенности на контуре этого эллипса, является требование $\overline{\lim}\sqrt[n]{E_n[f(x); -1, 1]_L} = \frac{1}{R}$, где $E_n[f(x); -1, 1]_L$ есть величина наилучшего приближения в среднем многочленами степени n функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что все функции, отличающиеся от $\ln|a-x|$ $(|a|>1)$ на функцию, регулярную внутри и на контуре эллипса, проходящего через точку $z=a$ и имеющего фокусами точки $-1, 1$, имеют на отрезке $[-1,1]$ наилучшее приближение в среднем многочленами степени n, асимптотически равное $E_n[\ln|a-x|; -1, 1]_L$.

Поступило
8 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 2 (1947). [2] С. М. Никольский, ДАН, 58, № 2 (1947). [3] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории апроксимации, 1947. [4] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, 1937.