Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 5

МАТЕМАТИКА

А. Б. ВАСИЛЬЕВА

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО НАИБОЛЬШЕМУ ИЗ МАЛЫХ ПАРАМЕТРОВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 15 II 1951)

Результаты настоящей работы представляют собой обобщение предыдущих результатов автора [1]. Наша работа непосредственно связана с работой А. Н. Тихонова [2] и посвящена исследованию свойств производных по параметрам $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ от решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \mu_\alpha \frac{dz_{j_\alpha}}{dt} &= F_{j_\alpha}(z_{l_1}, \ldots, z_{l_n}, y_k, t), \\ \frac{dy_l}{dt} &= f_l(z_{l_1}, \ldots, z_{l_n}, y_k, t), \end{aligned} \tag{1}$$

удовлетворяющего условиям

$$z_{j_\alpha}|_{t=0} = z^0_{j_\alpha}, \quad y_l|_{t=0} = y^0_l. \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем $\alpha = 1, 2, \ldots, n$; j_α, $l_\alpha = 1, 2, \ldots, m_\alpha$; $i, k = 1, 2, \ldots m$. Мы будем пользоваться также более сжатым обозначением $F_{j_\alpha}(z_{l_1}, \ldots, z_{l_n}, y_k, t) = F_{j_\alpha}(z_{l_\beta}, y_k, t)$ $(\beta = 1, 2, \ldots, n)$. Параметры μ_α считаются функциями некоторого параметра μ, бесконечно малыми при $\mu \to 0$ и такими, что $\lim\limits_{\mu \to 0} \mu_\alpha / \mu_{\alpha+1} = 0$.

В [1] был рассмотрен случай $n = 1$, т. е. случай, когда в систему входил только один параметр μ_1 и соответствующая ему группа из m_1 уравнений, а также группа из m уравнений, не содержащих параметра; неизвестными функциями, следовательно, являлись z_{j_1}, y_l и дифференцирование велось по единственному параметру μ_1. Ниже будут сформулированы результаты исследования производной от решения системы (1) при условиях (2) по наиболее медленно стремящемуся к нулю параметру μ_n.

Полагая в (1) $\mu_\alpha = 0$, получим вырожденную систему уравнений

$$F_{j_\alpha}(z_{l_\beta}, y_k, t) = 0, \quad \frac{dy_l}{dt} = f_l(z_{l_\beta}, y_k, t). \tag{3}$$

Функции $F_{j_\alpha}(z_{l_\beta}, y_k, t)$ будем считать непрерывными и допускающими существование некоторых функций φ_{j_α}, определяемых следующим образом: система функций $z_{j_1} = \varphi_{j_1}(z_{l_2}, \ldots, z_{l_n}, y_k, t)$ удовлетворяет системе уравнений $F_{j_1}(z_{l_1}, \ldots, z_{l_n}, y_k, t) = 0$ и называется корнем первого порядка; система функций $z_{j_2} = \varphi_{j_2}(z_{l_3}, \ldots, z_{l_n}, y_k, t)$ удовлетворяет системе уравнений $F_{j_2}(\varphi_{l_1}, z_{l_2}, \ldots, z_{l_n}, y_k, t) = 0$ и называется корнем второго порядка и т. д. $\varphi_{j_{\alpha+1}}$ определяются, если известны φ_{j_β} $(\beta=1, 2, \ldots, \alpha)$, как решение системы уравнений $F_{j_{\alpha+1}}(\varphi_{l_1}^{(\alpha)}, \varphi_{l_2}^{(\alpha)}, \ldots, \varphi_{l_\alpha}, z_{l_{\alpha+1}}, \ldots, z_{l_n}, y_k, t)=0$, где введено обозначение $\varphi_{l_\alpha}^{(\alpha)}(z_{l_{\alpha+1}}, \ldots, z_{l_n}, y_k, t)$ для корня $\varphi_{j_\beta}(z_{l_{\beta+1}}, \ldots, z_{l_n}, y_k, t)$ порядка β, в котором аргумент $z_{j_{\beta+1}}$ заменяется корнем $\varphi_{j_{\beta+1}}$, после чего аргумент $z_{j_{\beta+2}}$ заменяется корнем $\varphi_{j_{\beta+2}}$ и т. д.; наконец, z_{j_α} заменяется через φ_{j_α}.

Предположим, что корни любого порядка α обладают ограниченными частными производными по всем переменным и что каждому из корней соответствует своя так называемая область устойчивости D_α, являющаяся частью области определения корня и характеризующаяся существованием некоторого $\varepsilon > 0$ такого, что для каждой точки $(z_{j_{\alpha+1}}, \ldots, z_{j_n}, y_l, t)$, принадлежащей D_α, имеют место неравенства

$$\sum_{j_\alpha}(\varphi_{j_\alpha}-z_{j_\alpha})\,F_{j_\alpha}(\varphi_{l_1}^{(\alpha)}, \ldots, z_{l_\alpha}, z_{l_{\alpha+1}}, \ldots, z_{l_n}, y_k, t)<0, \tag{4}$$

если только $\sum\limits_{j_\alpha}(\varphi_{j_\alpha}-z_{j_\alpha})^2<\varepsilon^2$ и $z_{j_\alpha}\neq\varphi_{j_\alpha}$.

Для дальнейшего понадобится еще введенное А. Н. Тихоновым понятие области влияния устойчивого (т. е. имеющего область устойчивости) корня $\varphi_{j_\alpha}(z_{l_{\alpha+1}}, \ldots, z_{l_n}, y_k, t)$, определяемой как совокупность точек $(z'_{j_\alpha}, z'_{j_{\alpha+1}}, \ldots, z'_{j_n}, y'_l, t')$, для которых система уравнений

$$\frac{dz_{j_\alpha}}{d\tau}=F_{j_\alpha}(\varphi_{l_1}^{(\alpha-1)}(z_{l_\alpha}, z'_{l_{\alpha+1}}, \ldots, y'_k, t'), \ldots, z_l, z'_{l_{\alpha+1}}, \ldots, y'_k, t') \tag{5'}$$

при условиях

$$z_{j_\alpha}|_{\tau=0}=z'_{j_\alpha} \tag{5''}$$

имеет решение $z_{j_\alpha}(\tau)$, стремящееся при $\tau\to\infty$ к $\varphi_{j_\alpha}(z'_{l_{\alpha+1}}, \ldots, z'_{l_n}, y'_k, t')$. Предположим, что начальная точка $(0, y_i^0, z_{j_n}^0, \ldots, z_{j_1}^0)$ принадлежит области влияния корня первого порядка, точка $(0, y_i^0, z_{j_n}^0, \ldots, z_{j_2}^0)$ принадлежит области влияния корня второго порядка и т. д.

А. Н. Тихоновым выяснена связь решения $z_{j_\alpha}(t, \mu)$, $y_i(t, \mu)$ системы (1), удовлетворяющего условиям (2) при $\mu\to 0$, с определенным решением вырожденной системы (3), заключающаяся в том, что при всех указанных выше предположениях найдется некоторое T, не зависящее от μ, так что имеют место предельные равенства

$$\begin{aligned} &\lim_{\mu\to 0} z_{j_\alpha}(t, \mu)=\varphi_{j_\alpha}^{(n)}(\overline{y}_k, t) && \text{в области } 0<t\leqslant T; \\ &\lim_{\mu\to 0} y_l(t, \mu)=\overline{y_l}(t) && \text{в области } 0\leqslant t\leqslant T, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\overline{y_l}(t)$ удовлетворяют системе уравнений и условиям

$$\frac{\overline{dy_l}}{dt}=f_l(\varphi_{l_\beta}^{(n)}(\overline{y}_k, t), \overline{y}_k, t), \quad \overline{y_l}|_{t=0}=y_l^0.$$

Для того чтобы выяснить свойства производных по μ_n от решения системы (1) при условиях (2), сделаем следующие дополнительные предположения. Рассмотрим в пространстве (t, y_l, z_{j_α}) некоторую ограниченную область, для которой $0\leqslant t\leqslant T$ и в которой лежит рассматриваемое решение системы (1) для всех указанных t. В этой области потребуем существования и непрерывности частных производных первого порядка по всем аргументам от функций f_l и F_{j_α} и частных производных второго порядка от функций F_{j_α}. Введем обозначения

$$\frac{\partial f_l}{\partial y_k} = f_{lk}, \quad \frac{\partial f_l}{\partial z_{l_\beta}} = f_{ll_\beta}, \quad \frac{\partial F_{j_\alpha}}{\partial y_k} = F_{j_\alpha k}, \quad \frac{\partial F_{j_\alpha}}{\partial z_{l_\beta}} = F_{j_\alpha l_\beta},$$

$$\frac{\partial}{\partial z_{l_\beta}} F_{j_\alpha}(\varphi_{l_1}^{(\beta-1)}, \ldots, \varphi_{l_{\beta-1}}, z_{l_\beta}, \ldots, z_{l_n}, y_k, t) = F_{j_\alpha l_\beta}^{(\beta)}(z_{l_\beta}, \ldots, z_{l_n}, y_k, t).$$

Будем далее считать, что определители матриц $\|F_{j_\alpha l_\alpha}^{(\alpha)}(\varphi_{l_\alpha}, z_{l_{\alpha+1}}, \ldots, y_k, t)\|$ не обращаются в нуль. В указанных предположениях формулированные выше условия устойчивости (4) сводятся к условиям отрицательной определенности квадратичных форм $\sum\limits_{j_\alpha, l_\alpha}(z_{j_\alpha} - \varphi_{j_\alpha})(z_{l_\alpha} - \varphi_{l_\alpha}) F_{j_\alpha l_\alpha}^{(\alpha)}(\varphi_{l_\alpha}, z_{l_{\alpha+1}}, \ldots, y_k, t)$.

При выполнении всех перечисленных требований будем называть систему (1) принадлежащей к типу H.

Производные по μ_n от решения системы (1) при условиях (2) в обозначениях $\partial z_{j_\alpha} / \partial \mu_n = \zeta_{j_\alpha}$, $\partial y_l / \partial \mu_n = \eta_l$ удовлетворяют линейной системе с коэффициентами, зависящими от t, $y_l(t, \mu)$, $z_{j_\alpha}(t, \mu)$, и имеющей вид

$$\mu_\gamma \frac{d\zeta_{j_\gamma}}{dt} = F_{j_\gamma l_1}\zeta_{l_1} + \cdots + F_{j_\gamma l_n}\zeta_{l_n} + F_{j_\gamma k}\eta_k, \quad \gamma = 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$\mu_n \frac{d\zeta_{j_n}}{dt} = F_{j_n l_1}\zeta_{l_1} + \cdots + F_{j_n l_n}\zeta_{l_n} + F_{j_n k}\eta_k - \frac{dz_{j_n}}{dt}, \tag{7}$$

$$\frac{d\eta_l}{dt} = f_{ll_1}\zeta_{l_1} + \cdots + f_{ll_n}\zeta_{l_n} + f_{lk}\eta_k$$

(знаки суммирования по l_α опускаем), и нулевым начальным условиям. Соответствующей вырожденной системой будет следующая:

$$\overline{F}_{j_\gamma l_1}\zeta_{l_1} + \cdots + \overline{F}_{j_\gamma l_n}\zeta_{l_n} + \overline{F}_{j_\gamma k}\eta_k = 0, \quad \gamma = 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$\overline{F}_{j_n l_1}\zeta_{l_1} + \cdots + \overline{F}_{j_n l_n}\zeta_{l_n} + \overline{F}_{j_n k}\eta_k - \frac{d\varphi_{j_n}^{(n)}}{dt} = 0; \tag{8'}$$

$$\frac{d\eta_l}{dt} = \overline{f}_{ll_1}\zeta_{l_1} + \cdots + \overline{f}_{ll_n}\zeta_{l_n} + \overline{f}_{lk}\eta_k. \tag{8''}$$

Черта над характеристикой функции означает, что функция берется от аргументов $\varphi_{l_1}^{(n)}(\overline{y}_k, t), \ldots, \overline{y}_k, t$. Из уравнений (8′) ζ_{j_α} определяются как некоторые функции $\Psi_{j_\alpha}(\eta_k, t)$, подставляя которые вместо ζ_{j_α} в (8″) получим систему

$$\frac{d\eta_l}{dt} = \overline{f}_{ll_1}\Psi_{l_1} + \cdots + \overline{f}_{ll_n}\Psi_{l_n} + \overline{f}_{lk}\eta_k, \tag{9}$$

имеющую, таким образом, связь с (8), аналогичную связи (6) с (3).

Автором установлена возможность предельного перехода от функций $\zeta_{j_\alpha}(t, \mu)$, $\eta_l(t, \mu)$, удовлетворяющих (7) и нулевым начальным условиям, к некоторому решению $\overline{\zeta}_{j_\alpha}(t)$, $\overline{\eta}_l(t)$ вырожденной системы (8) при отличных, вообще говоря, от нуля начальных значениях для $\overline{\eta}_l(t)$.

Теорема. *Если система принадлежит к типу H, то*

$$1^\circ.\qquad \lim \eta_l(t,\mu)=\overline{\eta_l}(t).$$

Функции $\overline{\eta_l}(t)$ *определяются системой уравнений* (9) *и начальными условиями*

$$\overline{\eta_l}\,|_{t=0}=\int\limits_0^\infty f_l(\varphi_{l_1}^{(n-1)}(z_{l_n}(\tau),y_k^0,0),\ldots,z_{l_n}(\tau),y_k^0,0)-$$

$$-f_l(\varphi_{l_1}^{(n)}(y_k^0,0),\ldots,\varphi_{l_n}(y_k^0,0),y_k^0,0)\,d\tau,$$

где $z_{j_n}(\tau)$ — *решение системы* (5′), *полученное при условиях* (5″), *причем надо положить* $\alpha=n,\ t'=0,\ y_i'=y_i^0,\ z_{j_n}'=z_{j_n}^0$.

$$2^\circ.\qquad \lim_{\mu\to 0}\zeta_{j_\alpha}(t,\mu)=\overline{\zeta_{j_\alpha}}(t)=\Psi_{j_\alpha}(\overline{\eta_k}(t),t).$$

Каково бы ни было $t'>0$, *стремление к пределам равномерно относительно* t *на отрезке* $[t',T]$.

Поступило
10 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Б. Васильева, ДАН, **75**, № 4 (1950). [2] А. Н. Тихонов, Матем. сборн., **27** (69), № 1 (1950).