Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 5

МАТЕМАТИКА

В. В. ВАГНЕР

ГЕОМЕТРИЯ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ КАРТАНА И ТЕОРИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 15 II 1951)

Как известно ([1]), геометрия любого пространства Клейна сводится к геометрии пространства X_n с заданным характеристическим геометрическим дифференциальным объектом, псевдогруппа инвариантности которого приводится к группе Ли точечных преобразований X_n самого в себя. В качестве обобщения пространств Клейна Картаном были введены пространства с неголономными связностями, соответствующими произвольно заданной группе Ли. Задачей настоящей заметки является установление связи между этими обобщенными пространствами Картана и теорией геометрических дифференциальных объектов.

Пусть мы имеем составное многообразие $X_{n+(m)}$ с линейной связностью, определяемой системой уравнений Пфаффа $\delta\eta^a = d\eta^a + \Gamma^a_\alpha(\xi^\lambda, \eta^f)\, d\xi^\alpha = 0$. Рассмотрим в $X_{n+(m)}$ поле локальных точек, заданное вдоль кривой $\xi^\alpha = \xi^\alpha(t)$ базисного X_n уравнениями $\eta^a = \eta^a(t)$. Отобразим локальные пространства $X_m(\bar{t})$, ассоциированные с точками кривой, принадлежащими некоторой окрестности фиксированной точки t кривой, на локальное пространство $X_m(t)$, ассоциированное с фиксированной точкой. Пусть уравнения ${}^*\eta^a = {}^*\eta^a(\bar{t})$ определяют образы точек поля при этих отображениях. Контравариантный вектор порядка v $\frac{\delta^s \eta^a}{dt^s} = \left(\frac{d^{s\,*}\eta^a}{d\bar{t}^s}\right)_{\bar{t}=t}$ $(s = 1, \ldots, v)$ в касательном пространстве порядка v $T_{vm}(\eta^a(t))$, ассоциированном с локальной точкой поля $\eta^a(t)$, назовем вектором девиации порядка v данного поля локальных точек в точке t.

Пусть теперь мы имеем поле локальных точек в $X_{n+(m)}$, заданное на всем базисном X_n уравнениями $\eta^a = \eta^a(\xi^\lambda)$. Рассматривая это поле вдоль произвольной кривой базисного X_n, можно показать, что его вектор девиации может быть выражен следующим образом

$$\frac{\delta^s \eta^a}{dt^s} = s! \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k!} P^a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}(\xi^\lambda) \sum_{(i_1+\cdots+i_k=s)} \frac{1}{i_1!\cdots i_k!} \xi^{(i_1)\alpha_1}\cdots\xi^{(i_k)\alpha_k} \quad (s=1, \ldots, v), \tag{1}$$

где $P^a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}$ определяются рекуррентными формулами

$$P^a_{\alpha_1\cdots\alpha_{s+1}} = \partial_{(\alpha_{s+1}} P^a_{\alpha_1\cdots\alpha_s)} +$$

$$+ s! \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k!} \bar{\Gamma}^a_{(\alpha_{s+1}\,|\,b_1\cdots b_k\,|} \sum_{(i_1+\cdots+i_k=s)} \frac{1}{i_1!\cdots i_k!} P^{b_1}_{\alpha_1\cdots\alpha_{i_1}} \cdots P^{b_k}_{\alpha_{i_1+\cdots+i_{k-1}+1}\cdots\alpha_s)} \quad (2$$

и

$$P^a_\alpha = \partial_\alpha \eta^a + \overline{\Gamma}^a_\alpha; \quad \overline{\Gamma}^a_{\alpha b_1 \ldots b_k} = \Gamma^a_{\alpha b_1 \ldots b_k}(\xi^\lambda, \ \eta^b(\xi^\lambda)) \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{3}$$

Поле локальных точек называется регулярным, если ранг матрицы $\|P^a_\alpha\|$ имеет всюду наибольшее возможное значение.

Два пространства X_n и X_m называются имеющими в точках ξ и η соприкосновение порядка v, если задан связующий геометрический объект $P^a_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ $(s = 1, \ldots, v)$, где ранг матрицы $\|P^a_\alpha\|$ имеет наибольшее возможное значение, определяющий отображение

$$\eta^{(s)a} = s! \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k!} P^a_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} \sum_{(i_1 + \cdots + i_k = s)} \frac{1}{i_1! \cdots i_k!} \xi^{(i_1)\alpha_1} \ldots \xi^{(i_k)\alpha_k} \tag{4}$$

касательного пространства $T_{vn}(\xi)$ в касательное пространство $T_{vm}(\eta)$. Точки ξ и η называются точками соприкосновения пространств X_n и X_m, а связующий объект — объектом соприкосновения. Соприкосновение называется первого рода, если $n \leqslant m$, и второго рода, если $n \geqslant m$. В случае $n = m$ соприкосновение, таким образом, одновременно и первого и второго рода. Отображение касательных пространств в этом случае устанавливает между ними изоморфное соответствие. Будем говорить, что в составном многообразии $X_{n+(m)}$ задано отношение соприкосновения порядка v, если базисное X_n имеет соприкосновение порядка v с любым локальным $X_m(\xi)$ в точках ξ и $\eta(\xi)$. Таким образом, задание в $X_{n+(m)}$ отношения соприкосновения порядка v равносильно заданию поля локальных точек, являющихся точками соприкосновения локальных X_m, и объекта соприкосновения как функции точки базисного X_n. Из (1) легко видеть, что $P^a_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ являются компонентами связующего объекта, который, в случае регулярности поля локальных точек, определяет в $X_{n+(m)}$ отношение соприкосновения порядка v, при котором точки поля будут точками соприкосновения в локальных X_m. Таким образом, если в $X_{n+(m)}$ задана линейная связность, то задание одного регулярного поля локальных точек определяет инвариантным образом отношение соприкосновения любого порядка v, если v не превышает класс базисного X_n и локальных X_m*.

Зададим в $X_{n+(m)}$ поле локального характеристического геометрического объекта ω^A класса v, которое превращает локальные X_m в изоморфные между собой пространства Клейна с координатными структурами общего пространства Веблена — Уайтхеда. Предположим, что линейная связность в $X_{n+(m)}$ определяет изоморфное отображение локальных пространств, рассматриваемых как пространства Клейна, что, как известно ([2]), равносильно тому, что поле локального характеристического геометрического дифференциального объекта должно быть постоянным относительно этой связности, т. е. $D\omega^A = 0$. Рассмотрим сначала случай, когда эта связность будет нулевой кривизны. Ограничиваясь рассмотрением достаточно малой области базисного X_n, мы получаем, что между всеми локальными X_m, ассоциированными с точками этой области, можно установить взаимно-однозначное соответствие и отождествить их. Назовем полученное таким образом пространство универсальным локальным пространством. Отождествляя далее точки рассматриваемой области базисного X_n с точками соприкосновения в локальных пространствах, мы получим представление этой области базисного X_n при $n = m$ как области, а при $n < m$ — как

* Для $v = 1$ см. ([3]).

n-поверхности в универсальном локальном пространстве. При $n > m$ мы получим в рассматриваемой области базисного X_n конгруенцию $n - m$-поверхностей, пространством параметров которой будет некоторая область универсального локального пространства.

Переходя теперь к случаю, когда связность в $X_{n+(m)}$ не будет уже нулевой кривизны, мы получаем: при $n = m$ обобщение геометрии пространства Клейна, при $n < m$ обобщение геометрии n-поверхности в пространстве Клейна и при $n > m$ обобщение геометрии конгруенции $n - m$-поверхностей в X_n, пространством параметров которой является пространство Клейна.

Как известно, проектируя характеристический геометрический дифференциальный объект пространства Клейна или его дифференциальные продолжения соответствующего порядка на поверхность в этом пространстве Клейна, мы можем определить на поверхности геометрический дифференциальный объект, задание которого будет определять поверхность с точностью до автоморфного преобразования в пространстве Клейна. Проектирование характеристического геометрического дифференциального объекта на поверхность определяется с помощью связующего объекта соприкосновения поверхности с вмещающим ее пространством Клейна. Заменяя этот связующий объект объектом соприкосновения из (1), мы можем определить аналогично проекцию локальных характеристических объектов $X_{n+(m)}$ при $n < m$ на базисное X_n.

Аналогично, изучение конгруенции поверхностей в X_n, пространством параметров которой является пространство Клейна, с помощью проектирования характеристического геометрического дифференциального объекта пространства параметров на X_n может быть обобщено на случай $X_{n+(m)}$ при $n > m$. Так как проекция объекта является объектом, определенным только с точностью до подобия, то проектирование характеристических геометрических дифференциальных объектов в локальных пространствах X_m при $n \neq m$ определит в базисном X_n геометрический дифференциальный объект только с точностью до подобия.

Иначе обстоит дело при $n = m$. В этом случае отношение соприкосновения в $X_{n+(n)}$ определяет изоморфное соответствие между касательными пространствами, ассоциированными с соответствующими точками соприкосновения базисного и локального пространств, и, следовательно, в базисном X_n однозначно определится геометрический дифференциальный объект того же самого типа, что и локальные характеристические геометрические дифференциальные объекты. Геометрический дифференциальный объект в X_n, который может быть получен указанным способом, если мы ассоциируем с точками X_n локальные пространства Клейна того же числа измерений и введем в полученном составном многообразии отношение соприкосновения, определяемое изоморфной линейной связностью, мы будем называть геометрическим дифференциальным объектом Картана. Очевидно, что необходимым условием того, что данный геометрический дифференциальный объект в X_n является объектом Картана, будет то, что существует характеристический геометрический дифференциальный объект того же типа, т. е. с тем же законом преобразования компонент, который определяет пространство Клейна. Однако это условие не будет достаточным.

Предположим, что данное необходимое условие выполнено, и рассмотрим, к чему сводится нахождение достаточных условий. Пусть Ω^A — данный геометрический дифференциальный объект в X_n. Ассоциируем с каждой точкой X_n локальное пространство Клейна с соответствующим характеристическим объектом ω^A. Введем в этих локальных пространствах Клейна вместо общих координатных структур изоморфные между собой координатные структуры Клейна, характериуемые тем, что относительно входящих в них координатных систем компоненты характеристических объектов будут являться одними и теми же функциями координат точки $\omega^A(\eta^l)$. Условие того, что поле локального объекта ω^A постоянно относительно связности, теперь будет означать, что Γ^a_α должны быть решениями системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно контравариантного вектора V^a, выражающих, что производная Ли от ω^A, образованная с помощью этого вектора, равна нулю: $\overset{L}{D}\omega^A = 0$. Если группа автоморфных преобразований локальных пространств Клейна будет r-параметрической группой Ли, то рассматриваемая система будет иметь только r решений $\underset{i}{V^a}$, независимых относительно линейных комбинаций с постоянными коэффициентами. Таким образом мы получаем: коэффициенты изоморфной связности должны иметь вид $\Gamma^a_\alpha = \underset{i}{V^a}(\eta^l)\, G^i_\alpha(\xi^\lambda)$, где G^i_α — произвольные функции. Выделим теперь в локальных пространствах Клейна координатные подструктуры, состоящие из координатных систем, относительно которых точки соприкосновения имеют одни и те же координаты η^a_0. Получаем, что $P^a_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ теперь определяются формулами (2), где $\overline{\Gamma}^a_{\alpha b_1\ldots b_k} = \underset{i}{V^a_{b_1\ldots b_k}}(\eta^l_0)\, G^i_\alpha(\xi^\lambda)$.

Таким образом для G^i_α получаем систему дифференциальных уравнений порядка $v-1$

$$F^A(\Omega^B(\xi^\lambda),\ P^a_{\alpha_1\ldots\alpha_s}) = \omega^A(\eta^l_0) \quad (s = 1, \ldots, v),$$

где F^A — функции, определяющие преобразования компонент Ω^A, а вместо $P^a_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ предполагаются подставленными их выражения через G^i_α и их производные. Если эта система интегрируема, то Ω^A является объектом Картана. Произвол в решении будет показывать произвол в выборе изоморфной связности. В этом случае представляет интерес нахождение дополнительных условий, которые делали бы возможным однозначное определение изоморфной связности по заданному объекту Картана.

Так как рассматриваемая нами геометрия составного многообразия $X_{n+(n)}$ с локальными пространствами Клейна, в котором определено отношение соприкосновения с помощью изоморфной линейной связности, очевидно, совпадает с геометрией обобщенного пространства Картана, то мы получили связь между этой последней и теорией дифференциальных объектов. Заметим, что теория поверхностей в обобщенном пространстве Картана совпадает с рассмотренным нами выше случаем $X_{n+(m)}$ при $n < m$.

Поступило
6 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Вагнер, Дополнение к книге О. Веблен и Дж. Уайтхед, Основания дифференциальной геометрии, 1949. [2] В. В. Вагнер. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 8, 11 (1950). [3] H. Weyl, Bull. Am. Math. Soc., 35, 716 (1929).