Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 5

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

О СВЯЗИ КВАЗИ-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В первом добавлении к монографии ([1]) мною установлены следующие две теоремы.

Теорема B. *Если наилучшее приближение $E_n f(x)$ на данном отрезке функции $f(x)$ при помощи многочленов степени n удовлетворяет при всех $n>0$ неравенствам*

$$E_n f(x) \leqslant \frac{1}{F(n)}, \tag{B}$$

где $F(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$ $(a_k \geqslant 0)$ целая функция выше нулевого рода, то $f(x) \equiv 0$ на всем отрезке, когда $f(x_0)=f^{(k)}(x_0)=0$ при всех $k>0$ в какой-нибудь его точке.

Теорема D'. *Пусть*

$$\rho_n = \max_{p>0} p \sqrt[n]{E_p f(x)} \leqslant A_n \quad (n=1,\ 2,\ldots). \tag{1}$$

Если ряд монотонно убывающих чисел

$$S_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_n} = \infty \tag{D'}$$

расходится, то равенства $f(x_0)=f^{(k)}(x_0)=0$ в одной точке x_0 при всех $k>0$ возможны лишь при $f(x)\equiv 0$ на всем отрезке.

Теорема B была выведена в ([1]) на основании того факта, что $F(x)$ — весовая функция ($F(x) \in W$), а теорема D' была получена как следствие теоремы B при помощи рассуждения *, аналогичного тому, посредством которого в моей последней заметке ([2]) установлена теорема 1.

Покажем, что *теоремы* B *и* D' *эквивалентны*, т. е. обратно, *если $E_n f(x)$ удовлетворяет условию* (B), *то соответствующий ряд $S_0 = \Sigma \frac{1}{\rho_n}$ расходится.* Для этого замечаем, что вследствие (B)

$$\frac{1}{\rho_n} = \min_{p>0}\left(\frac{1}{p\sqrt[n]{E_p f(x)}}\right) \geqslant \min_{x\geqslant 1}\left(\frac{1}{x}\sqrt[n]{F(x)}\right) = \lambda_n,$$

---

* Тем же способом в монографии ([1]) из теоремы B (сноска стр. 184) была выведена также известная теорема Данжуа — Карлемана, что *расходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_n}$, *где* $M_n = \max_{a\leqslant x\leqslant b} \sqrt[n]{|f_n(x)|}$, *достаточна для квази-аналитичности* $f(x)$ (в том же смысле, что и выше).

причем целая функция $F(x)=\Sigma a_k x^{2k}$ $(a_k \geqslant 0)$ выше нулевого рода. Следовательно, согласно теореме 3 ([2]), получаем условие D′ $\Sigma 1/\rho_n \geqslant \geqslant \Sigma\lambda_n = \infty$.

Неравенства (1) при условии (D′) определяют, таким образом, квази-аналитический класс $H(A_n)$, аналогичный квази-аналитическим классам Карлемана ([3]). При этом можно показать*, что здесь также верна и обратная в смысле Карлемана теорема.

Теорема, обратная D′. *Если ряд монотонно убывающих чисел*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_n} < \infty \tag{2}$$

сходится, то среди функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\rho_n = \max_{p>0} p\sqrt[n]{E_p f(x)} < kA_n \quad (k \text{ — постоянная}), \tag{1bis}$$

найдется функция $f_0(x) \gtreqless 0$ не квази-аналитическая, т. е. удовлетворяющая равенствам $f_0(x_0)=f_0^{(i)}(x_0)=0$ при всех $i>0$.

При помощи того же рассуждения, каким была получена ([1]) теорема B, доказывается более общая теорема:

Теорема B*. *Какова бы ни была четная монотонная весовая функция $\Phi(x) \in W$, если $E_n f(x) \leqslant 1/\Phi(n)$ $(n \geqslant 1)$, то $f(x)$ есть квази-аналитическая функция.*

Заметим, что теорема B* оказалась бы более общей, чем теорема B, если бы существовала монотонно возрастающая четная функция $\Phi(x) \in W$, для которой ряд $S_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \Sigma \min \frac{1}{x}\sqrt[n]{\Phi(x)}$ был бы сходящимся**.

Из формулированной выше теоремы, обратной D′, вытекает***.

---

* Доказательство этой теоремы дано в комментарии к вышеупомянутому добавлению к монографии ([1]), которое включено в 1-й том собрания моих сочинений.

** В связи с квази-аналитическими функциями мы ограничимся здесь рассмотрением лишь симметричных (четных) функций. Заметим только, что для несимметричных функций $\Phi(x) \in W$ расходимость ряда S_0 не является вообще необходимой. Действительно, назовем $\Phi_0(y)$ полувесовой функцией $(\Phi_0(y) \in W_0)$, если при любом $\varepsilon > 0$ для всякой непрерывной функции $\varphi(y)$ $(\varphi(y)/\Phi_0(y) \to 0$ при $y \to \infty)$ можно построить такие многочлены $P_0(y)$, что

$$|\varphi(y) - P_0(y)| < \varepsilon\Phi_0(y) \quad (0 \leqslant y < \infty). \tag{A}$$

Полагая $y=x^2$, $\varphi(y)=f(\pm x)$, $P_0(y)=P(x)$, $\Phi_0(y)=\Phi(\pm x)$, получаем равнозначное (A) неравенство $|f(x)-P(x)| < \varepsilon\Phi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$. Таким образом, применяя теорему 1 ([2]) к функции $\Phi(x) \in W$, находим, что расходимость ряда $\Sigma\lambda_n = \Sigma \min_n \frac{1}{|x|}\sqrt[n]{\Phi(x)} = \Sigma \min \frac{1}{\sqrt{y}}\sqrt[n]{\Phi_0(y)}$ достаточна для того, чтобы $\Phi_0(y) \in W_0$. Но если, сохраняя значение $\Phi_0(y)$ для $y \geqslant 0$, мы положим $\Phi_0(y)=\infty$ при $y<0$, то функция $\Phi_0(x)$ окажется при том же условии весовой функцией $\Phi_0(x) \in W$ на всей оси $(-\infty < x < \infty)$, так как неравенство (A) будет автоматически удовлетворено для $y<0$. Между тем, непосредственное применение той же теоремы 1 ([2]) к определенной указанным способом несимметричной функции $\Phi_0(x)$ привело бы к гораздо более ограничительному условию расходимости ряда $S^* = \Sigma\lambda_n^*$, где $\lambda_n^* = \min_{y>0} \frac{1}{y}\sqrt[n]{\Phi_0(y)} = \lambda_{n/2}^2$.

*** Легко видеть, кроме того, что ни одна функция $\Phi(x)$ не может быть весовой, если $\lambda_n = 0$ для некоторого $n=n_0$. В самом деле, в этом случае $\lim_{|x|=\infty} \Phi(x)/x^{n_0} = 0$; поэтому, полагая произвольную функцию $f(x)$ ограниченной, чтобы приблизить ее с весом $1/\Phi(x)$, нужно было бы пользоваться только многочленами степени $< n_0$, имея в своем распоряжении лишь ограниченное число n_0 параметров.

Лемма 1. *Пусть дан сходящийся ряд* (2); *всегда существует четная монотонная функция* $\Phi_0(x)$, *не являющаяся весовой, для которой**

$$\lambda_n^* = \min_{1 \leqslant x < \infty} \frac{1}{|x|} \sqrt[n]{\Phi_0(x)} \geqslant \frac{1}{A_n}, \tag{3}$$

причем $\Phi_0(x)$ *определяется равенствами*

$$\Phi_0(p) = \frac{1}{E_p f_0(x)} \quad (p \geqslant 1), \tag{4}$$

где $f_0(x)$ — *не квази-аналитическая функция теоремы, обратной* D′.

Действительно, функция $\Phi_0(x)$ не может быть весовой, так как, вследствие теоремы B*, функция $f_0(x)$ не могла бы удовлетворять (4).

Теорема 4. *Пусть* $\Phi(x) \in N$ (*нормально* [2] *возрастающая функция*). *Для того чтобы все функции, удовлетворяющие условию*

$$E_p f(x) \leqslant 1 / \Phi(p) \quad (p \geqslant 1), \tag{5}$$

были квази-аналитическими, необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$S_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \sum \min_{p \geqslant 1} \frac{\sqrt[n]{\Phi(p)}}{p} = \infty \tag{6}$$

был расходящимся; это же условие необходимо и достаточно для того, чтобы функция $\Phi(x)$ *была весовой.*

Достаточность условия (6) уже доказана** (даже без ограничения $\Phi(x) \in N$). Для доказательства необходимости условия (6) положим, что оно нарушено, т. е. $S_0 < \infty$. В таком случае, согласно лемме 1, берем не квази-аналитическую функцию $f_0(x)$, удовлетворяющую (4), причем

$$\frac{1}{\rho_n^*} = \lambda_n^* = \min_{1 \leqslant x < \infty} \frac{1}{x} \sqrt[n]{\Phi_0(x)} \geqslant \lambda_n = \min_{1 \leqslant x < \infty} \frac{1}{x} \sqrt[n]{\Phi(x)}. \tag{7}$$

По определению [2] функций $\Phi(x) \in N$, они характеризуются тем, что функция

$$x\Phi'(x) / \Phi(x) = n(x) = n \tag{8}$$

также монотонно возрастает до ∞. Поэтому*** для каждого $n \geqslant n_0 > 0$ уравнение (8) имеет одно и только одно решение $x = x_n = x(n)$ соответствующее минимуму $\lambda_n = \min\limits_{x \geqslant 1} \frac{1}{x} \sqrt[n]{\Phi(x)}$, причем всем значениям $x \geqslant 1$ соответствует какое-нибудь $n = n(x) < \infty$. Таким образом, из (7) заключаем, что для каждого $x \geqslant 1$ имеем при соот-

---

* Следует заметить, что в правой части неравенства (3) можно в случае надобности заменить A_n через kA_n (k — постоянная), так как $\lambda_n^* = \min \frac{1}{kx} \sqrt[n]{\Phi_0(kx)}$; поэтому, полагая $\Phi_1(x) = \Phi_0(kx)$, имеем $\lambda_n' = \min \frac{1}{x} \sqrt[n]{\Phi_1(x)} = k\lambda_n^*$, причем $\Phi_0(x)$ и $\Phi_1(x)$ одновременно будут (или нет) весовыми функциями.

** Теорема D′ [1] и теорема 1 [2].

*** Напоминаю [2], что все монотонные функции $\Phi(x)$, определяемые последовательностью $\{\Phi(n)\} \in N$, эквивалентны.

ветствующем n $\lambda_n^n = \frac{1}{x^n}\Phi(x) \leqslant (\lambda_n^*)^n \leqslant \frac{1}{x^n}\Phi_0(x)$, откуда $\Phi(x) \leqslant \Phi_0(x)$, т. е. для всех $x \geqslant 1$ должно осуществляться неравенство

$$\Phi(x) \leqslant \Phi_0(x). \tag{9}$$

Следовательно, ввиду того, что $\Phi_0(x)$ не весовая функция, $\Phi(x)$ также не может быть весовой функцией. С другой стороны, вследствие равенства (4), имеем (при сходимости ряда S_0)

$$\frac{1}{\Phi_0(p)} = E_p f_0(x) \leqslant \frac{1}{\Phi(p)} \quad (p \geqslant 1).$$

С л е д с т в и е 1 (Дополнение к теореме B). *Если $F^*(x)$ есть модуль четной целой функции нулевого рода, то существует не квази-аналитическая функция $f_0(x)$, удовлетворяющая неравенству $E_n f_0(x) \leqslant 1 / F^*(n)$.*

Действительно, для $F_0^*(x) = F_0(x) = \Sigma a_k x^{2k}$ $(a_k \geqslant 0)$ это утверждение есть частный [2] случай теоремы 4, так как $F_0(x) \in N$. Но модуль $F_0^*(x) = \left| \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\beta_k^2}\right) \right|$ четной функции нулевого рода меньше, чем $F_0(x) = \Pi \left(1 + \frac{x^2}{|\beta_k^2|}\right)$.

С л е д с т в и е 2. *Если $\{\Phi(n)\} \in N$ и*

$$E_n f(x) \leqslant c / \Phi(n) \quad (n \geqslant n_0), \tag{10}$$

то функции $f(x)$, удовлетворяющие (10), *образуют квази-аналитический класс*: 1) *при том и только при том условии*, что*

$$\int_1^\infty \frac{\log \Phi(x)}{x^2} dx = \infty, \tag{11}$$

2) *а также при том и только при том эквивалентном условии, что ряд*

$$S_1 = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{x_n}, \tag{12}$$

где $x_n \geqslant 1$ суть единственные решения уравнения (8), *соответствующие каждому целому значению $n \geqslant n_0$, так как условие* (11), *как и условие* (12), *равнозначно* [2] (6).

С л е д с т в и е 3. *Если $\Phi(x) \in N$, то для того, чтобы $\Phi(x) \in W$, необходимо и достаточно, чтобы все функции $f(x)$, удовлетворяющие условию* (10), *были квази-аналитичными* (*в выше определенном смысле*).

Таким образом, если $\Phi(x) \in N$, то условие теоремы B* фактически оказывается не более общим, чем условие теоремы B.

Поступило
15 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. B e r n s t e i n, Leçons sur les propriétés extérmales, Paris, 1926. [2] С. Н. Б е р н ш т е й н, ДАН, 77, № 4 (1951). [3] T. C a r l e m a n, Fonctions quasi-analytiques, Paris, 1926. [4] С. М а н д е л ь б р о й т, Квази-аналитические классы функций, М.— Л., 1937.

* Аналогичный результат доказан С. Мандельбройтом [4].