

К. С. ШИФРИН

ИНДИКАТРИСА РАССЕЯНИЯ СВЕТА ОБЛАЧНОЙ КАПЛЕЙ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 24 I 1951)

1. Оптические свойства облаков в значительной мере определяются индикатрисой рассеяния света на облачной капле. Для видимой области капли в облаке являются „большими“ (величина $\rho = 2\pi a / \lambda$ у них порядка 20—100). Это позволяет искать приближенное решение задачи (о вычислении индикатрисы) методами геометрической оптики (¹, ²). Необходимо отметить, впрочем, что эти вычисления должны быть дополнены учетом волновых эффектов (²).

Большим недостатком приближенных вычислений индикатрис является невозможность точной оценки допускаемой при этом ошибки. Такая оценка может быть выполнена только путем сравнения приближенной индикатрисы с точной.

Известно всего несколько работ, где выполнены точные вычисления индикатрисы рассеяния для больших прозрачных шаров. В. В. Шулейкин опубликовал кривые для $\rho = 9$ (³). Рей рассмотрел случай $\rho = 12$ (⁴). Паранджейп, Нейк и Вайдиа вычислили индикатрисы для $\rho = 15, 20, 30$ (⁵).

Однако все эти работы еще не решают задачи определения точной индикатрисы для облачных частиц. Наиболее крупные из капель, к которым относятся вычисления в последней работе (⁵), имеют радиус около 3 μ . Самым же существенным недостатком работы (⁵) является то, что число точек, вычисленных для крупных капель, очень мало, так что картина получается весьма неполной; затруднительно использовать эти индикатрисы как „эталоны“. Отсутствие подробных вычислений для больших прозрачных шаров представляет, на наш взгляд, существенный пробел в теории рассеяния света в мутной среде.

В настоящем сообщении мы указываем результаты точных вычислений для капли воды, взвешенной в воздухе. Радиус капли $a \cong 6,25\mu$, $\rho = 60$ и показатель преломления вещества капли принят равным $n = 1,3300$.

2. Первый этап вычислений заключался в составлении подробных таблиц угловых функций Q_l и S_l , входящих в формулы Ми:

$$Q_l(\beta) = \frac{P_l^{(1)}(\cos \beta)}{\sin \beta},$$
$$S_l(\beta) = -P_l^{(1)}(\cos \beta) \sin \beta$$

($P_l^{(1)}$ — первый присоединенный полином Лежандра).

С помощью рекуррентного соотношения, которому удовлетворяют функции Q_l , были составлены таблицы этих функций для 13 углов $\beta = 0, 1, 2, 5, 10, \dots, 80, 90$, для всех l от 1 до 80.

Большие вычисления по рекуррентным формулам практически невозможны, если предварительно не вычислить по какой-либо иной, нерекуррентной формуле „опорную сеть“ значений. Для этой цели мы использовали удобную асимптотическую формулу для полиномов Лежандра, указанную в работе В. А. Фока⁽⁶⁾. Значения Q_l вычислялись по рекуррентной формуле и сравнивались с „опорными“ значениями. Функции S_l вычислялись через Q_l .

Табулирование амплитуд парциальных волн по формулам Ми обычно осложняется тем, что функции ζ_l , входящие в общие формулы для амплитуд, даже для вещественных аргументов комплексны. Это сильно усложняет вычисления. В случае прозрачных частиц этого осложнения, однако, легко избежать. Здесь следует в формулах для амплитуд заменить ханкелевские функции на бесселевы и неймановы. В этом случае вещественные и мнимые части амплитуд с самого начала легко разделяются, и мы все время имеем дело только с вещественными числами.

Вычисление бесселевых и неймановых сферических функций производилось по рекуррентным формулам. Для получения необходимой точности пришлось вычислить все функции с номерами $l < 70$. Для контроля была вычислена „опорная сеть“ значений сферических функций по приближенным формулам Фока⁽⁶⁾.

Формулы Фока приводят к следующим выражениям для функций $\psi_l(x)$ и $\chi_l(x)$ при $l \leq x$:

$$\psi_l(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{8}} \sqrt{\frac{q}{\operatorname{tg} \beta^*}} \{ \sqrt{3} J_{l/2}(\operatorname{lg}) - Y_{l/2}(\operatorname{lg}) \},$$

$$\chi_l(x) = - \sqrt{\frac{\pi x}{8}} \sqrt{\frac{q}{\operatorname{tg} \beta^*}} \{ J_{l/2}(\operatorname{lg}) + \sqrt{3} Y_{l/2}(\operatorname{lg}) \}.$$

Здесь $q = \operatorname{tg} \beta^* - \beta^*$, а угол β^* определяется соотношением

$$\cos \beta^* = \frac{l}{x} \quad \left(0 \leq \beta^* \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Все вычисления проводятся при постоянном x . Определяя β^* с помощью таблицы косинусов по данному l , находим далее $\operatorname{tg} \beta^*$, q , а затем ψ_l и χ_l .

Аналогичные выражения получаются и для случая $x \geq l$.

Таблица 1

β	l	p	β	l	p
0	$3218 \cdot 10^3$	0,0000	90	36,90	-0,2594
1	$2368 \cdot 10^3$	0,0276	100	32,61	-0,6675
2	$793,2 \cdot 10^3$	0,0117	110	40,14	-0,4930
5	$110,4 \cdot 10^3$	-0,3184	120	58,62	0,4833
10	$14,50 \cdot 10^3$	0,0179	130	326,6	0,5295
20	5062	-0,0649	140	485,0	0,9532
30	2492	-0,3000	150	649,0	0,7190
40	1307	-0,5850	160	271,2	-0,3252
50	602,0	-0,6356	170	167,3	-0,8798
60	297,3	-0,3582	175	483,0	0,8907
70	198,2	-0,3275	178	563,0	-0,8060
80	70,16	-0,3316	179	81,73	0,2527
			180	189,0	0,0000

С помощью таблиц ψ_i и χ_i нами были вычислены амплитуды парциальных волн Ми. Затем, используя таблицы Q_i и S_i , мы вычислили все слагаемые в суммах для полей, а потом и сами поля. Все вычисления производились в „две руки“. Во всех этапах мы сохранили 6 значущих цифр. Результаты этих вычислений приведены в табл. 1.

В таблице β — угол рассеяния (отсчитанный от направления вперед), $i = \frac{p^2}{a^2} I$, где I — интенсивность рассеяния в единице телесного угла, а p — степень поляризации рассеянного света.

При вычислении коэффициента ослабления вовсе не нужно производить дополнительное суммирование квадратов модулей амплитуд парциальных волн. Это суммирование уже выполнено при вычислении амплитуды поля, рассеянного вперед. Через эту амплитуду коэффициент ослабления выражается очень просто. В нашем случае коэффициент ослабления оказался равным $1,9912 \pi a^2$.

3. Индикатриса рассеяния, построенная по данным таблицы, указана на рис. 1 и 2.

Кривая 1 (см. рис. 1) изображает индикатрису на участке $(0, 10^\circ)$, кривая 2 — $(10, 40^\circ)$ и кривая 3 — $(40^\circ - 180^\circ)$. Масштаб на рисунке относится к кривой 3. Кривая 2 имеет масштаб в 10 раз меньший, а кривая 1 — в 2500 раз меньше. Это изменение масштабов наглядно показывает порядок интенсивностей света, рассеянного под различными углами. В основном рассеянный свет сосредоточен под малыми углами. Максимум вблизи $\beta = 140^\circ$ обязан первой радуге. По формулам Эри максимум интенсивностей в радуге не совпадает с направлением радуги по геометрической оптике. Для нашей капли он смещен на 5° к большим углам (см. рис. 1).

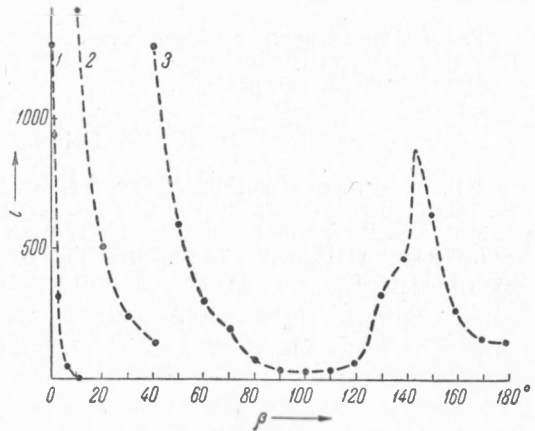


Рис. 1

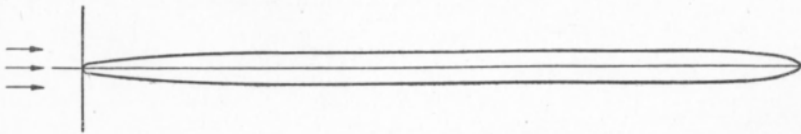


Рис. 2

Индикатрису, изображенную на рис. 2, следует рассматривать как характерную кривую для рассеяния в облаках. Мы видим, и это обстоятельство весьма важно, что индикатриса рассеяния в облаках очень сильно вытянута.

Необходимо, разумеется, подчеркнуть, что столь сильная анизотропия в распределении рассеянного света будет иметь место только в тонких слоях, где имеет место однократное рассеяние. В реальных облаках, оптические толщины которых обычно значительно больше единицы, пространственное распределение рассеянного света будет существенно более равномерным, несмотря на то, что индикатриса рассеяния будет очень сильно вытянута. При достаточной толщине облака следует ожидать практически симметричного распределения рассеянного света. Это обстоятельство, по видимому, находит подтверж-

дение в наблюдениях над угловым распределением яркости облаков*.

В заключение заметим, что сказанное здесь относительно того, что пространственное распределение рассеянного света определяется не только вытянутостью индикатрисы рассеяния, но и толщиной слоя, относится, очевидно, не только к облакам, но и к любой мутной среде вообще.

Автор благодарен И. З. Гордону, Е. П. Барашковой, Е. И. Багровой и Н. С. Смирновой за помощь в вычислениях.

Главная геофизическая обсерватория
им. А. И. Воейкова
Ленинград

Поступило
24 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. В. Шулейкин, Физика моря, 1, 1933. ² К. С. Шифрин, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 2 (1950). ³ В. В. Шулейкин, Журн. геофизики, 3, 145 (1933). ⁴ B. Ray, Proc. Ind. Ass. for Cultiv. Sci., 8, 23 (1923). ⁵ G. R. Paranjpre, Y. G. Naik and P. B. Vaideya, Proc. Ind. Acad. Sci., 9, 333 (1939). ⁶ В. А. Фок, ДАН, 1, 97 (1934).

* При сферически симметричном распределении рассеянного света внутри облака яркость поверхности облака должна описываться законом Ламберта.