Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 4

ГИДРОЛОГИЯ

Член-корреспондент АН СССР М. А. ВЕЛИКАНОВ

ДИСКРЕТНАЯ КОНЦЕПЦИЯ МУТНОСТИ*

Предложенная мною в 1944 г. ([1]) и развитая затем в специальной монографии ([2]) гравитационная теория переноса наносов турбулентным потоком при своем появлении вызвала, в части кинематики, со стороны А. Н Колмогорова следующее возражение ([3]): дисперсия мутности получается (попутно) из моих уравнений равной:

$$\sigma_s^2 = \bar{s}(1 - \bar{s}) \tag{1}$$

(s — мутность, выраженная в относительном объеме, черта сверху означает временное осреднение), а это выражение совместимо лишь с дискретным случайным рядом: 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...

Но так как при выводе уравнения я пользовался представлением о мутности как о континууме, т. е. применял пространственное осреднение по существу дискретного распределения, то, следовательно, дисперсия должна была бы у меня получаться меньшей, чем для дискретного ряда. Это возражение, конечно, справедливо: всякое осреднение или сглаживание уменьшает дисперсию; и хотя во всех дальнейших выводах я выражением (1) нигде не пользовался, и мои динамические уравнения от него не зависят, но все же мне было интересно доказать — чему и посвящена эта статья, — что последовательно проведенная дискретная концепция** мутности приводит в результате к тем же основным зависимостям, которые были мною опубликованы в предыдущих моих работах, исходивших из непрерывной концепции мутности.

Будем рассматривать дисперсоид, состоящий из: а) водного потока с неизменными вдоль и по времени глубинами и скоростями и б) твердых и тяжелых частиц, поддерживаемых в потоке во взвешенном состоянии гидродинамическими силами в результате турбулентного перемешивания.

Распределение твердых частиц по высоте будем считать квазистационарным. Кроме того, введем два очевидных положения, обычно во всех работах по наносам даже не упоминаемых по своей очевидности, но которые в строгой дискретной теории приходится оговорить: 1) размер твердых частиц очень мал по сравнению с размером возмущений (с «масштабом пульсации»), и поэтому разницей в скоростях вокруг обтекаемой частицы можно пренебречь; 2) твердые частицы двигаются в потоке лишь поступательно (вращение отсутствует).

Твердая тяжелая частица непрерывно падает по отношению к окружающей ее жидкости с присущей ей «гидравлической скоростью» w

* Термин «мутность» в гидрологии применяется в смысле содержания взвешенных наносов в единице объема потока.

** Впервые дискретная концепция мутности в несколько ином виде была дана применительно к одной частной задаче в нашей лаборатории К. К. Орловым, погибшим на фронте Великой Отечественной войны.

и одновременно переносится самой жидкостью со скоростью, вертикальную компоненту которой обозначим через v. Скорость вертикального перемещения частицы в неподвижной системе координат будет поэтому равна

$$v_{(s)} = v - w. \tag{2}$$

Рассматривая мгновенное распределение твердых частиц (приблизительно одинаковых по размерам и плотности) в некотором объеме потока, мы можем мысленно разделить этот объем на N равных ячеек, причем примем, что объем ячейки выбран нами гораздо меньшим объема твердой частицы. Тогда все ячейки можно будет отнести к трем категориям: 1) заполненные жидкостью, числом n_0; 2) заполненные твердым веществом, числом n_1; 3) частично заполненные и жидкостью и твердым телом, числом $n_{1/2}$. Имеем:

$$N = n_0 + n_1 + n_{1/2}\,.$$

Нетрудно показать, что при выборе достаточно малых размеров ячеек отношение $\frac{n_{1/2}}{n_0 + n_1}$ можно сделать сколь угодно малым; поэтому для дальнейшего примем приближенное равенство

$$N = n_0 + n_1,$$

которое в пределе, при $N \to \infty$, становится строгим.

Фиксируем теперь одну определенную ячейку, а жидкость вместе с твердыми частицами представим себе находящимися в движении, и будем мысленно измерять внутри ячейки через равные сколь угодно малые интервалы времени δt значения: мутности s и двух компонент скорости u и v. Тогда, если относить все измерения к твердой фазе, то все случаи нахождения ее в ячейке выразятся значениями мутности $s_j = 1$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$, а все случаи ненахождения — через $s_k = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Соответственные одновременные компоненты скорости (также отнесенные к твердой фазе) будем обозначать в первом случае через $u_{(s)\,j}$, $v_{(s)\,j}$, а во втором через $u_{(s)\,k}$, $v_{(s)\,k}$. Если же мы интересуемся поведением жидкой фазы, то все случаи ее нахождения дадут нам единицы, которые мы будем обозначать теперь через $(1 - s_k)$, а все случаи ненахождения — через нули, обозначаемые через $(1 - s_j)$. Соответственные компоненты скорости теперь войдут уже без индекса: u_j, v_j, u_k, v_k.

Соотношения между компонентами скоростей твердой и жидкой фаз устанавливаются равенствами:

$$v_{(s)} = v - w, \quad u_s = u.$$

Первое было уже дано выше; второе же предполагает отсутствие отставания в продольном направлении твердых частиц от окружающей жидкости, что для некрупных частиц оправдывается с достаточным приближением. Наконец, сплошную нумерацию всех последовательных измерений будем обозначать индексом l.

Теперь установим ряд очевидных, или легко выводимых, равенств:

$$\overline{s_j} = 1, \quad \overline{s_k} = 0, \quad \overline{s_l} = n_1 / N, \quad \sigma_s^2 = \overline{s}\,(1 - \overline{s}),$$
$$s_j = \overline{s_l} + s_j', \quad s_k = \overline{s_l} + s_k', \quad s_j' = 1 - \overline{s}, \quad s_k' = -\overline{s}.$$

Условие стационарности распределения наносов в потоке даст нам при достаточно длительном наблюдении:

а) для жидкой фазы:

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{n_0} v_k(1-s_k)=0;$$

б) для твердой фазы:

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{n_1} v_{(s)\,j}s_j=\frac{1}{N}\sum_{1}^{n_1}(v_j-w)\,s_j=0\,.$$

Множим и делим первое равенство на n_0, а второе на n_1 и получаем:

$$\frac{n_0}{N}\frac{\sum_1^{n_0} v_k}{n_0}=0\,,\qquad \frac{n_1}{N}\frac{\sum_1^{n_1} v_j-w}{n_1}=0,$$

откуда следует:

$$\overline{v}_k=0,\quad \overline{v}_j=w\quad (\text{или}\ \ \overline{v}_s=0).$$

Иными словами: среднее из k-х значений скорости (при $s=s_k=0$) равно нулю, а среднее из j-х значений скорости (при $s=s_j=1$) равно гидравлической крупности наносов w. А так как число j-х членов ряда равно n_1, а число k-х членов ряда n_0, то получаем среднее значение за весь период наблюдений:

$$\overline{v}_l=\frac{n_0\overline{v}_k+n_1\overline{v}_j}{N}=\overline{s}w \tag{3}$$

и, соответственно:

$$\overline{v}_{(s)\,l}=\frac{n_0\overline{v}_{(s)\,k}+n_1\overline{v}_{(s)\,j}}{N}=\frac{n_0\,(\overline{v}_k-w)+n_1\,(\overline{v}_j-w)}{N}=-w\,(1-\overline{s}). \tag{4}$$

В дальнейшем мы будем иногда отбрасывать индекс l, как само собой разумеющийся.

Мы получили, таким образом, те же два равенства, что и в прежних работах, исходивших из непрерывной концепции мутности.

Также нетрудно получить для дискретной концепции и выражение для момента корреляции. Имеем, очевидно:

$$\overline{v's'}=\frac{n_0\overline{v_k's_k'}+n_1\overline{v_j's_j}}{N}\,,$$

где, согласно вышеприведенным равенствам,

$$\overline{v_k's_k'}=\frac{1}{n_0}\sum_1^{n_0}(v_k-\overline{s}w)\,(-\overline{s})=w\overline{s}^2,$$

$$\overline{v_j's_j'}=\frac{1}{n_1}\sum_1^{n_1}(v_j-\overline{s}w)\,(1-\overline{s})=w\,(1-\overline{s})^2;$$

подставляя, будем иметь опять тождественное с прежним выражение:

$$\overline{v's'}=(1-\overline{s})\,w\overline{s}^2+\overline{s}w\,(1-s)^2=w\overline{s}\,(1-\overline{s}). \tag{5}$$

Нам остается лишь вывести выражение для работы взвешивания и для работы сопротивления.

Для всех j-х членов ряда измерений имеем силу тяжести, действующую на содержимое нашей ячейки, равную: $\sum\limits_{1}^{n_1} s_j(\rho_s - \rho)\, g\, \delta\omega$; для всех k-х членов она равна нулю, а среднее ее значение для всех членов ряда будет, очевидно, равно $(\rho_s - \rho)\, g\bar{s}\, \delta\omega$. Умножая на среднюю скорость падения твердой фазы $\bar{v}_{(s)} = -w(1 - \bar{s})$ и меняя знак в целях получения работы потока на поддержание частиц во взвешенном состоянии, т. е. работы потока против силы тяжести, получим

$$(\rho_s - \rho)\, g\, \delta\omega\, w\bar{s}\,(1 - \bar{s}). \tag{6}$$

Тот же результат мы получили бы еще проще, умножая выражение для объемного переноса (5) на вес объема $\delta\omega$ твердой фракции в воде.

Переходя к составлению выражения для работы сопротивления, мы будем придерживаться установившегося в науке отождествления турбулентного трения с переносом количества движения; этот перенос выразится (опуская постоянные значения плотностей):

а) для жидкой фазы:

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{n_0}(1 - s_k)\, u_k v_k = \frac{n_0}{N}\,\frac{\sum\limits_{1}^{n_0} u_k v_k}{n_0};$$

б) для твердой фазы:

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{n_1} s_j u_j (v_j - w) = \frac{n_1}{N}\,\frac{\sum\limits_{1}^{n_0} u_j (v_j - w)}{n_1}.$$

Применяем обычное разложение скоростей на осредненные и пульсационные и используем равенства

$$v'_k = v_k - \bar{v}_k = v_k, \quad v'_j = v_j - w, \quad v'_l = v_j - \bar{s}w = v_k - \bar{s}w,$$

откуда следует, что

$$v'_k = v'_l + \bar{s}w, \quad v'_j = v'_l + \bar{s}w - w.$$

После всех подстановок и элементарных операций мы придем к выражениям для переноса жидкой и твердой фаз:

$$(1 - \bar{s})\,\overline{u'v'}, \quad \bar{s}\,\overline{u'v'},$$

также тождественным с прежними.

Обращает на себя внимание интересное обстоятельство: при выводе этих равенств и непрерывной теории мы были вынуждены вводить два допущения ([1]):

$\overline{u'v's'} = 0$ («постулат третьих моментов»),

$\overline{u's'} = 0$ (вероятное отсутствие корреляционной связи между продольной скоростью и мутностью).

Здесь, исходя из дискретной концепции, мы получаем тот же результат без добавочных допущений.

Институт географии
Академии наук СССР

Поступило
14 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Великанов, Изв. АН СССР, ОТН, № 3 (1944). [2] М. А. Великанов, Движение наносов, М., 1948. [3] Дискуссия по статье М. А. Великанова, Перенос взвешенных наносов турбулентным потоком, Изв. АН СССР, ОТН, № 5 (1946).