Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 4

АСТРОНОМИЯ

Г. Ф. ХИЛЬМИ

ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМЫ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ ПРИ НЕУПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЯХ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 9 II 1951)

1. Вопрос об эволюции системы большого числа твердых гравитирующих частиц представляет собой важную задачу планетной космогонии. Особенно важен тот случай, когда движущей силой эволюции является переход механической энергии в тепловую из-за взаимных столкновений частиц. Решение такой задачи необходимо для всякой космогонической гипотезы, представляющей допланетную стадию солнечной системы в виде роя самостоятельных твердых частиц, начиная с гипотезы Канта и кончая современными, например, теорией О. Ю. Шмидта.

Первая попытка изучения этих вопросов была предпринята А. Пуанкаре в связи с математическим анализом гипотезы Лигондеса. Однако его результаты имеют для космогонии весьма ограниченное значение.

В советской науке интерес к задаче об эволюции метеорно-пылевого роя возродился в связи с космогоническими исследованиями О. Ю. Шмидта ([2], [3]), в которых вскрыто ведущее космогоническое значение процессов перехода механической энергии в немеханические формы. Недавно появилась успешная попытка Л. Э. Гуревича и А. И. Лебединского ([4]) решить эту задачу методами статистической физики.

Однако это не снимает необходимости продвигаться в этой задаче и строгими методами небесной механики.

2. Рассмотрим n материальных точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, притягивающихся по закону Ньютона. Пусть x_i, y_i, z_i обозначают декартовы координаты точки P_i относительно осей с началом в центре тяжести системы. Обозначим через r_i расстояние точки P_i от центра тяжести системы, а через r_{ij} — расстояние между точками P_i и P_j.

Мы будем в дальнейшем рассматривать потенциальную функцию U, кинетическую энергию T и момент инерции I^2 системы n гравитирующих точек:

$$U = \sum_{i,\ j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2), \quad I^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2. \tag{1}$$

Затем мы будем пользоваться интегралами движения: интегралом энергии

$$T - U = H, \tag{2}$$

где H — постоянная энергия, и интегралами площадей (момента количества движения):

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i y'_i - x'_i y_i) = c_1, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (y_i z'_i - z_i y'_i) = c_2, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (z_i x'_i - x_i z'_i) = c_3, \tag{5}$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные. Величина

$$\Theta^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \tag{6}$$

есть квадрат длины вектора главного момента системы.

3. Рассмотрим тождества, справедливость которых легко установить непосредственной проверкой

$$x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2 =$$
$$= \frac{1}{r_i^2} [(x_i y'_i - y_i x'_i)^2 + (y_i z'_i - z_i y'_i)^2 + (z_i x'_i - x_i z'_i)^2] + r_i'^2. \tag{7}$$

Умножая эти тождества, соответственно, на $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и складывая их, получим:

$$2T = P + \sum_{i=1}^{n} m_i r_i'^2, \tag{8}$$

где

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i^2} (x_i y'_i - y_i x'_i)^2 + \sum_{i=1} \frac{m_i}{r_i^2} (y_i z'_i - z_i y'_i)^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i^2} (z_i x'_i - x_i z'_i)^2. \tag{9}$$

Рассмотрим в этом выражении первую сумму правой части. В этой сумме переменные величины x_i, x'_i, y_i, y'_i не являются независимыми переменными. В силу интеграла площадей они связаны соотношением (3). Если, применив правило множителей Лагранжа, мы определим условный минимум первой суммы в правой части равенства (9), то найдем, что этот минимум равен c_1^2 / I^2. Обращаясь к соотношениям (4) и (5), мы получим, что условные минимумы других сумм будут c_2^2 / I^2 и c_3^2 / I^2. Пользуясь этими результатами и (6) мы из (9) найдем:

$$P \geqslant \frac{\Theta^2}{I^2}. \tag{10}$$

Из соотношений (8) и (10) следует

$$2T \geqslant \frac{\Theta^2}{I^2} + \sum_{i=1}^{n} m_i r_i'^2,$$

а отсюда, в свою очередь, получаем

$$\frac{\Theta^2}{2T - \sum\limits_{i=1}^{n} m_i r_i'^2} \leqslant I^2. \tag{11}$$

В заключение отметим одно свойство знаменателя правой части этого неравенства. Возьмем очевидные неравенства

$$x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2 - r_i'^2 \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Умножая эти неравенства, соответственно, на $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и складывая, получим

$$2T - \sum_{i=1}^{n} m_i r_i'^2 \geqslant 0.$$

Полученное наравенство дает нам право утверждать, что

$$2T - \sum_{i=1}^{n} m_i r_i'^2 \to 0 \quad \text{при } T \to 0. \tag{12}$$

4. Рассмотрим рой метеорно-пылевой материи, который обладает отличным от нуля моментом количества движения. Мы будем рассматривать случай, когда частицы роя могут сталкиваться в неупругом ударе, так что после соударения двух или большего числа частиц кинетическая энергия убывает, переходя частично в тепловую энергию. Движение частиц происходит под влиянием сил тяготения и ударных сил. Кроме того, предположим, что во все время движения рой остается в определенной конечной части пространства*.

В любой регулярный момент времени, т. е. такой, когда не происходит удара двух или большего числа частиц, движение материальных точек, образующих рой, описывается уравнениями небесной механики. Однако заранее мы не знаем возможной эволюции роя. После соударения, в зависимости от конкретных обстоятельств этого явления, столкнувшиеся частицы могут сохраниться, но могут при сильном ударе раздробиться на несколько частиц или же объединиться в одну частицу, если столкновение произойдет при малой относительной скорости. Поэтому после каждого соударения надо менять начальные условия движения, а в некоторых случаях и число движущихся частиц. Таким образом, аналитические соотношения проблемы многих тел будут выполняться в каждый регулярный момент времени, однако в той схеме n гравитирующих тел (т. е. для такого числа этих тел и таких начальных условий), которая возникнет в результате всех предшествующих соударений. Иначе говоря, мы будем иметь дело с дискретно меняющейся во времени схемой многих тел.

В этих условиях из интеграла энергии вытекает соотношение

$$T - (U + U^*) = H^*, \tag{13}$$

где T — кинетическая энергия, U — потенциальная функция системы тел как материальных точек, U^* — сумма потенциальных функций ингредиентов системы как сплошных материальных тел конечных размеров и H^* — величина постоянная от одного соударения до другого.

За время удара, согласно теории этого явления, координаты частиц не меняются, поэтому $U + U^*$ при ударе сохраняет свое значение. Однако U^* в случае объединения частиц будет возрастать и в случае дробления будет убывать, а U будет изменяться соответственно.

Кинетическая энергия T за время удара будет убывать. Следовательно, обусловленная ударом смена начальных условий такова, что H^* будет убывать на величину убыли кинетической энергии. И так будет после каждого соударения.

* Это ограничение можно ослабить.

Мы будем рассматривать такой случай, когда в результате большого числа столкновений в рое имеет место значительное убывание H^*. Последствием этого, как это видно из (13), будет осуществление по крайней мере одного из двух явлений: либо значительное уменьшение кинетической энергии T, либо значительное возрастание $U+U^*$; в действительных случаях вероятнее всего происходят оба явления одновременно.

Исследуем, в первую очередь, тот случай, когда через некоторый промежуток времени происходит значительное возрастание $U+U^*$. Возрастание U, как это легко усмотреть из формулы для U (первая из формул (1)), означает, что взаимные расстояния между частицами в среднем будут убывать, и мы будем иметь в рое тенденцию к объединению мелких тел в более крупные. Возрастание U^* означает осуществление таких объединений.

Изучим теперь явления, вызываемые убыванием кинетической энергии T. Что бы с частицами ни происходило, если пространственные размеры роя остаются ограниченными определенными границами, то расстояния движущихся частиц от центра тяжести роя будут ограничены сверху, т. е. можно указать такое число $R>0$, что $r_i(t) \leqslant R$ для всех i и при всех $t>0$. Из этого неравенства и того, что количество материи в рое остается неизменным, следует, что момент инерции I^2 ограничен сверху. Пусть I^{*2} — верхняя грань I^2; тогда в любой момент времени $I^2 \leqslant I^{*2}$. Из этого неравенства и неравенства (11) следует:

$$\frac{\Theta^2}{2T - \sum\limits_{i=1}^{n} m_i r_i'^2} \leqslant I^{*2}.$$

Обращаясь к этому неравенству, мы видим, что при достаточно значительном уменьшении его знаменателя, обусловленного надлежащим убыванием кинетической энергии T, оно может выполняться только в том случае, если убыль кинетической энергии системы будет сопровождаться уменьшением Θ^2. В этом случае рой должен измениться, превращаясь в систему тел с уменьшенным орбитальным моментом. Закон сохранения момента количества движения указывает, что изменение роя должно быть таким, при котором избыток орбитального момента может перейти в другую форму момента. Такой формой может быть только вращательный момент тела. В нашей системе возникнут тела, поглотившие избыток орбитального момента, т. е. вращающиеся вокруг своих осей в прямом направлении.

Таковы итоги математического рассмотрения вопроса. Реальные физические процессы, повидимому, таковы, что одновременно происходит убывание кинетической энергии T и возрастание потенциальной функции $U+U^*$. С точки зрения метеоритной космогонии, возникновение планет с прямым вращением есть форма устранения избытка орбитального момента, возникающего при достаточно большом уменьшении кинетической энергии вследствие перехода механической энергии метеоритного роя в немеханические виды при столкновениях частиц роя.

Геофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
5 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Poincaré, Leçons sur les hypothèses cosmogoniques, 1913, стр. 93 и 94. [2] О. Ю. Шмидт, Четыре лекции о теории происхождения Земли, 1950. [3] О. Ю. Шмидт, Изв. АН СССР, сер. физ., 14, № 1 (1950); Тр. Геофиз. ин-та, № 11 (138) (1950). [4] Л. Э. Гуревич и А. И. Лебединский, Изв. АН СССР, сер. физ., № 6 (1950).