

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

К. З. ГАЛИМОВ

**ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМА УСЛОВИЙ НЕРАЗРЫВНОСТИ
КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ**

(Представлено академиком А. Е. Арбузовым 6 I 1951)

В настоящей заметке дается наиболее простой вывод условий неразрывности конечных деформаций в инвариантной форме. В частности, из них следуют условия неразрывности деформаций, данные в работах (1,2).

1. Обозначения и основные понятия. Положение точки M среды в ее начальном состоянии будем определять радиусом-вектором \mathbf{r} , проведенным из некоторой точки O фиксированного пространства. В деформированной среде точке M соответствует точка M^* , положение которой будем определять радиусом-вектором \mathbf{r}^* , проведенным из той же точки O . Обе точки отнесем к общей системе криволинейных координат x^1, x^2, x^3 .

Тогда для координатных векторов в точках M и M^* имеем

$$\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha}, \quad \mathbf{r}_\alpha^* = \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (1,1)$$

а ковариантными компонентами основного метрического тензора до и после деформаций будут:

$$g_{\alpha, \beta} = \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta, \quad g_{\alpha, \beta}^* = \mathbf{r}_\alpha^* \mathbf{r}_\beta^* \quad (1,2)$$

Величины

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta}^* - g_{\alpha\beta}), \quad \eta_\beta^\alpha = g^{\alpha\gamma} \eta_{\gamma\beta} \quad (1,3)$$

называются ковариантными компонентами тензора деформации в системе осей недеформированной среды. Здесь за исходное состояние среды принято ее недеформированное состояние. Переменные x^α , по аналогии с гидродинамикой, называются лагранжевыми. Общим точкам M и M^* соответствуют численно равные параметры x^α . Векторы и тензоры в системе осей координат в точке M^* будем снабжать звездочкой.

Теперь примем за исходное состояние среды ее деформированное состояние, при этом точки M и M^* отнесем к общей системе координат y^1, y^2, y^3 и, рассматривая \mathbf{r} и \mathbf{r}^* как функции этих последних, для координатных векторов имеем

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i}, \quad \mathbf{r}_i^* = \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial y_i} \quad (1,4)$$

Компонентами основного метрического тензора в недеформированной и деформированной средах будут:

$$h_{ik} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k, \quad h_{ik}^* = \mathbf{r}_i^* \mathbf{r}_k^*. \quad (1,5)$$

Величины

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (h_{ik}^* - h_{ik}) \quad (\varepsilon_k^i = h_{*j}^{ij} \varepsilon_{kj}) \quad (1,6)$$

называются компонентами тензора деформации в переменных Эйлера y^k ($k = 1, 2, 3$).

Обозначим через S_1 , S_2 и S_3 первый, второй и третий инварианты тензора $\|\eta_{\beta}^{\alpha}\|$, а через I_1 , I_2 и I_3 — соответствующие инварианты тензора $\|\varepsilon_k^i\|$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \eta_{\alpha}^{\alpha}, & 2S_2 &= S_1^2 - \eta_{\beta}^{\alpha} \eta_{\alpha}^{\beta}, & S_3 &= \det(\eta_{\beta}^{\alpha}); \\ I_1 &= \varepsilon_k^k, & 2I_2 &= I_1^2 - \varepsilon_k^i \varepsilon_i^k, & I_3 &= \det(\varepsilon_k^i). \end{aligned} \quad (1,7)$$

Тогда между определителями метрических тензоров до и после деформации существуют соотношения

$$g(1 + 2S_1 + 4S_2 + 8S_3) = g^*, \quad h = h^*(1 - 2I_1 + 4I_2 - 8I_3), \quad (1,8)$$

где

$$g = \det(g_{\alpha\beta}), \quad g^* = \det(g_{\alpha\beta}^*), \quad h = \det(h_{ik}), \quad h^* = \det(h_{ik}^*).$$

2. Некоторые вычислительные формулы. Компоненты дискриминантного тензора равны смешанным произведениям координатных векторов

$$c_{\alpha\beta\gamma}^* = (\mathbf{r}_{\alpha}^* \mathbf{r}_{\beta}^* \mathbf{r}_{\gamma}^*),$$

причем

$$c_{\alpha\beta\gamma}^* c_{\alpha\sigma\tau}^* = \delta_{\sigma}^{\beta} \delta_{\tau}^{\gamma} - \delta_{\tau}^{\beta} \delta_{\sigma}^{\gamma}. \quad (2,1)$$

Ковариантные компоненты основного метрического тензора деформированной среды равны:

$$g_{*}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} c_{\alpha\pi\gamma}^* c^{\beta\lambda\sigma} g_{\pi\lambda}^* g_{\gamma\sigma}^* = \frac{g}{g^*} (g^{\alpha\beta} + 2c^{\alpha\pi\gamma} c^{\beta\lambda\sigma} g_{\pi\lambda}^* \eta_{\gamma\sigma} + 2c^{\alpha\pi\gamma} c^{\beta\lambda\sigma} \eta_{\pi\lambda}^* \eta_{\gamma\sigma}).$$

Но так как

$$\begin{aligned} c^{\alpha\pi\gamma} c^{\beta\lambda\sigma} g_{\pi\lambda}^* \eta_{\gamma\sigma} &= g^{\alpha\beta} S_1 - \eta^{\alpha\beta}, \\ c^{\alpha\pi\gamma} c^{\beta\lambda\sigma} \eta_{\pi\lambda}^* \eta_{\gamma\sigma} &= 2(S_2 g^{\alpha\beta} - S_1 \eta^{\alpha\beta} + \eta_{\gamma}^{\alpha} \eta^{\gamma\beta}), \end{aligned}$$

то

$$g_{*}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - \frac{2g}{g^*} (\eta^{\alpha\beta} + 2S_1 \eta^{\alpha\beta} - 2\eta_{\gamma}^{\alpha} \eta^{\beta\gamma} + 4g^{\alpha\beta} S_3). \quad (2,2)$$

Пусть $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$, $\Gamma_{\gamma}^{\alpha\beta}$ и $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$, $\Gamma_{\gamma}^{\alpha\beta}$ — символы Кристоффеля относительно $g_{\alpha\beta}^*$ и $g_{\alpha\beta}$. Тогда, воспользовавшись выражением ковариантной производной $\nabla_{\gamma} \eta_{\alpha\beta}^*$ находим

$$\Gamma_{\alpha, \beta\gamma}^* = \Gamma_{\alpha, \beta\gamma} + P_{\alpha, \beta\gamma} + 2\Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda} \eta_{\alpha\lambda}^*, \quad (2,3)$$

где

$$P_{\alpha, \beta\gamma} = \nabla_{\beta} \eta_{\alpha\gamma} + \nabla_{\gamma} \eta_{\alpha\beta} - \nabla_{\alpha} \eta_{\beta\gamma}, \quad (2,4)$$

∇ — знак ковариантного дифференцирования относительно $g_{\alpha\beta}$.

Справедливы также соотношения

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} + P_{\lambda, \alpha\beta} g_{*}^{\lambda\gamma}, \quad (2,5)$$

так как, умножая их на $g_{\gamma\sigma}^{*}$, мы вновь получаем (2,3).

3. Условия неразрывности деформации в переменных Лагранжа. В равенствах (4):

$$\nabla_{\alpha}^{*} \mathbf{r}_{\beta}^{*} = 0, \quad (3,1)$$

имеющих место для деформированного евклидова пространства, знак ковариантного дифференцирования ∇^{*} относительно $g_{\alpha\beta}^{*}$ заменим знаком ковариантного дифференцирования ∇ относительно $g_{\alpha\beta}$ согласно (2,5).

Тогда вместо (3,1) будем иметь:

$$\nabla_{\alpha} \mathbf{r}_{\beta}^{*} = -\mathbf{r}_{*}^{\lambda} P_{\lambda, \alpha\beta}. \quad (3,2)$$

Отсюда, дифференцируя ковариантно по x^{π} , имеем

$$\nabla_{\pi} \mathbf{r}_{\sigma}^{*} \cdot \nabla_{\alpha} \mathbf{r}_{\beta}^{*} + \mathbf{r}_{\sigma}^{*} \nabla_{\pi} \nabla_{\alpha} \mathbf{r}_{\beta}^{*} = -\nabla_{\pi} P_{\sigma, \alpha\beta},$$

или, учитывая (3,2), получим

$$\mathbf{r}_{\sigma}^{*} \nabla_{\pi} \nabla_{\alpha} \mathbf{r}_{\beta}^{*} = -\nabla_{\pi} P_{\sigma, \alpha\beta} - g_{*}^{\lambda\gamma} P_{\lambda, \pi\sigma} P_{\gamma, \alpha\beta}.$$

Если, наконец, в последних равенствах произвести операцию свертывания при помощи тензора $c^{\rho\pi\alpha} c^{\omega\sigma\beta}$ и учесть равенства $\nabla_{\pi} \nabla_{\alpha} \mathbf{r}_{\beta}^{*} = \nabla_{\alpha} \nabla_{\pi} \mathbf{r}_{\beta}^{*}$, то будем иметь:

$$c^{\rho\lambda\gamma} c^{\omega\alpha\beta} (\nabla_{\gamma} \nabla_{\beta} \eta_{\alpha\lambda} + \frac{1}{2} g_{*}^{\pi\sigma} P_{\pi, \alpha\lambda} P_{\sigma, \beta\gamma}) = 0, \quad (3,3)$$

откуда при помощи (2,1) находим условия неразрывности конечных деформаций в инвариантной форме:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \eta_{\lambda\gamma} - \nabla_{\alpha} \nabla_{\lambda} \eta_{\beta\gamma} - \nabla_{\gamma} \nabla_{\beta} \eta_{\alpha\lambda} + \nabla_{\gamma} \nabla_{\lambda} \eta_{\alpha\beta} + \\ + g_{*}^{\pi\sigma} (P_{\pi, \lambda\gamma} P_{\sigma, \alpha\beta} - P_{\pi, \beta\gamma} P_{\sigma, \alpha\lambda}) = 0. \end{aligned} \quad (3,4)$$

Здесь содержатся шесть независимых соотношений. Три из них получим, полагая $\lambda = \gamma$, $\alpha = \beta$, $\alpha \neq \lambda$, а остальные три, полагая $\alpha = \beta \neq \lambda \neq \gamma$.

При малых деформациях $g_{*}^{\pi\sigma} \approx g^{\pi\sigma}$, но произведения тензоров $P_{\pi, \lambda\gamma} P_{\sigma, \alpha\beta}$ приходится сохранять, так как тензор $P_{\alpha, \beta\gamma}$ содержит повороты, и в таких телах, как тонкие стержни, пластинки и оболочки, указанные произведения могут быть величинами порядка деформации и в области существования линейного закона Гука.

4. Условия неразрывности деформации в переменных Эйлера. Совершенно так же, как и в § 3, имеем

$$\nabla_i^* \nabla_k^* \varepsilon_{rs} - \nabla_i^* \nabla_r^* \varepsilon_{ks} - \nabla_s^* \nabla_k^* \varepsilon_{ir} + \nabla_s^* \nabla_r^* \varepsilon_{ik} - h^{mn} (P_{m,rs}^* P_{n,ik}^* - P_{m,ks}^* P_{n,ir}^*) = 0, \quad (4,1)$$

где

$$h^{mn} = h_*^{mn} + \frac{2h^*}{h} (\varepsilon^{mn} - 2I_1 \varepsilon^{mn} + 2\varepsilon_k^m \varepsilon^{kn} + 4h_*^{mn} I_3); \quad (4,2)$$

$$P_{m,rs}^* = \nabla_r^* \varepsilon_{ms} + \nabla_s^* \varepsilon_{mr} - \nabla_m^* \varepsilon_{rs}, \quad (4,3)$$

∇^* — знак ковариантного дифференцирования относительно h_{ik}^* .

Физико-технический институт
Казанского филиала Академии наук СССР

Поступило
2 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. В. Новожилов, Основы нелинейной теории упругости, 1948. ² В. З. Власов, Общая теория упругих оболочек, 1949. ³ Д. И. Кутилин, Теория конечных деформаций, 1947. ⁴ Я. С. Дубнов, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1 (1933).