Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

В. Г. НЕВЗГЛЯДОВ

НОВЫЙ МЕТОД В ДИНАМИКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 5 II 1951)

§ 1. При обтекании стационарным потоком вязкой жидкости прямого цилиндра кругового сечения существует, как показал Том ([1]), в интервале чисел Рейнольдса $0 < \mathrm{Re} < 50$ обтекание, когда за цилиндром имеются два симметрично расположенных вихря, окруженные замкнутой линией тока, примыкающей к цилиндру. Такое обтекание будем называть „безотрывное обтекание". Если цилиндр медленно вращать, безотрывное обтекание его станет несимметричным. Для пространственных осесимметрических потоков также существует безотрывное обтекание.

Дадим определение: безотрывным ламинарным обтеканием называем такие стационарные потоки вязкой жидкости, натекающей на твердые тела, и ими, вообще, ограниченные с некоторых сторон, в которых можно выделить для каждого обтекаемого тела составленную из линий тока трубку, тонкую на бесконечности впереди и позади тела, такую, что линии тока, ее составляющие, проходя мимо тела, его замыкают, отделяя от остального внешнего потока. Диаметр трубки $2\lambda'$ на бесконечности предполагаем малым, но не слишком малым.

Трубку называем „поверхность C" (или „контур C" — для плоского потока), на ней нет критических точек, и она отделяет пограничный слой, характеризуемый параметром λ', от внешнего потока.

Описанный поток либо точно соответствует реальным потокам в некотором интервале малых чисел Re, либо является приближенной моделью, которая может быть применена в тех случаях, когда мал удельный вес турбулентного следа в общем значении лобового сопротивления (почти безотрывное обтекание). Такое обтекание имеет место для удобообтекаемых тел и тонких профилей, в его рассмотрении мы не ограничены малостью чисел Re, что важно для практического применения.

Предлагаемый метод решает задачу динамики для режима почти безотрывного обтекания *.

§ 2. Поверхность C не является заранее заданной, ее нужно апроксимировать. Внешний поток в нулевом приближении можно описывать моделью потенциального обтекания идеальной жидкостью, с помощью этой модели апроксимируем поверхность C (контур C).

Наряду с контуром C, введем в рассмотрение контур C_0, определив его для безотрывного обтекания как составленный из контура тела плюс замкнутая линия тока, примыкающая к нему, а для почти

* Предварительное сообщение о настоящей работе было сделано 17 XI 1949 г. на семинаре гидродинамики Математико-механического факультета Ленинградского университета.

безотрывного обтекания C_0 — это просто контур самого тела (аналогично определяем поверхность C_0).

Поле скоростей $\mathbf{u}_0$ внешнего потока в нулевом приближении (в пренебрежении вязкостью) находим из решения задачи:

$$\mathbf{u}_0 = \nabla\varphi; \quad \Delta\varphi = 0; \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{\text{на } C_0} = 0; \quad (\nabla\varphi)_\infty = \mathbf{u}_\infty; \quad p_0 = p_\infty + \frac{1}{2}(1 - u_0^2). \tag{2,1}$$

Здесь все величины безразмерны: скорость разделена на скорость потока на бесконечности, координаты — на характеристическую длину R.

Предполагая задачу (2,1) решенной, возьмем в качестве приближенного представления поверхности C поверхность, образованную линиями тока течения $\mathbf{u}_0 = \nabla\varphi$, которые на бесконечности образуют тонкую трубочку диаметра 2λ, обходят твердое тело и вновь уходят на бесконечность трубкой. $\lambda' / R \equiv \lambda$ — малый безразмерный параметр теории.

Для плоского потока контур C апроксимируется линиями

$$\psi(x, y) = \pm\lambda, \tag{2,2}$$

где ψ — функция тока ($\psi = 0$ — линия, включающая контур C_0).

§ 3. Уравнения Навье — Стокса для стационарного потока несжимаемой вязкой жидкости запишем в безразмерной форме:

$$(\mathbf{u}, \nabla)\,\mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{u}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0; \quad \mathrm{Re} \equiv \frac{u_\infty R}{\nu}. \tag{3,1}$$

Предполагая задачу (2,1) решенной и поле $\mathbf{u}_0 = \nabla\varphi$ известным, разложим поле $\mathbf{u}$ на два:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}; \tag{3,2}$$

искомое поле $\mathbf{v}(x, y, z)$ будем считать малым в среднем сравнительно с $\mathbf{u}_0$, что будет иметь место во внешнем потоке, если параметр λ взят не слишком малым.

Подставляя (3,2) в уравнения (3,1), линеаризируем их, т. е. заменим следующими:

$$\begin{gathered}(\mathbf{u}_0, \nabla)\,\mathbf{v} + (\mathbf{v}, \nabla)\,\mathbf{u}_0 = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v};\\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0; \quad p_1 \equiv p - p_0.\end{gathered} \tag{3,3}$$

На больших расстояниях от тела $\mathbf{u}_0 \to \mathbf{u}_\infty$, и уравнения (3,3) переходят в уравнения Озеена, но вблизи твердых тел наши уравнения лучше описывают реальный поток и пригодны, что особенно важно, для больших чисел Re.

Пригодность уравнений (3,3) определяется степенью приближения рассматриваемого потока к режиму почти безотрывного обтекания, а не малостью чисел Re, как в уравнениях Озеена.

Уравнения (3,3) — это уравнения теории почти безотрывного обтекания, в них $\mathbf{u}_0$ предполагается известным из решения задачи (2,1); из системы четырех линейных уравнений (3,3) ищутся четыре функции, а именно: p_1 и три компонента $\mathbf{v}$.

§ 4. Условие малости в среднем $\mathbf{v}$ сравнительно с $\mathbf{u}_0$, делающее уравнения (3,3) хорошим приближением к действительности, соблюдено лишь во внешнем потоке, соответственно краевые условия для $\mathbf{v}$ надо задать на бесконечности и на поверхности C. На бесконечности полагаем:

$$\mathbf{v}|_\infty = 0. \tag{4,1}$$

Далее, для простоты, ограничимся плоским потоком. Введем криволинейные ортогональные координаты φ, ψ — потенциал скорости и функцию тока нулевого приближения § 2. Контур C задается линиями (2,2), выделим на них отрезок

$$\varphi_1 < \varphi < \varphi_2; \tag{4,2}$$

здесь φ_1 соответствует переднему краю обтекаемого контура и φ_2 — заднему. Поток жидкости внутри пограничного слоя — это поток между линиями (2,2), обозначим в нем проекции скорости $\mathbf{u}$ на криволинейные оси φ и ψ через u_φ, u_ψ.

В силу прилипания мы имеем на контуре тела:

$$(u_\varphi)_{\psi=0} = 0; \quad (u_\psi)_{\psi=0} = 0 \quad (\varphi_1 < \varphi < \varphi_2). \tag{4,3}$$

В пограничном слое u_φ или u_φ / u_0 можно приближенно представить полиномом:

$$\frac{u_\varphi}{u_0} = \frac{\psi}{\lambda} q_1(\varphi) + \left(\frac{\psi}{\lambda}\right)^2 q_2(\varphi) + \cdots + \left(\frac{\psi}{\lambda}\right)^n q_n(\varphi) \quad (\varphi_1 < \varphi < \varphi_2;\ 0 \leqslant \psi \leqslant \lambda), \tag{4,4}$$

и аналогично для $0 \geqslant \psi \geqslant -\lambda$. Для нормального компонента u_ψ имеем подобное же представление; после удовлетворения условию несжимаемости его можно записать в виде:

$$\frac{u_\psi}{u_0} = -\lambda \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\psi}{\lambda}\right)^2 \frac{dq_1}{d\varphi} + \cdots + \frac{1}{n+1} \left(\frac{\psi}{\lambda}\right)^{n+1} \frac{dq_n}{d\varphi} \right\}. \tag{4,5}$$

Постоянные интеграции в решении для $\mathbf{v}$ мы будем определять из условия гладкого сшивания с профилями (4,4) и (4,5) на контуре C, а именно

$$1 + \frac{v_\varphi}{u_0} = \frac{u_\varphi}{u_0}, \quad \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{v_\varphi}{u_0}\right) = \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{u_\varphi}{u_0}\right), \ldots, \frac{\partial^l}{\partial\psi^l}\left(\frac{v_\varphi}{u_0}\right) = \frac{\partial^l}{\partial\psi^l}\left(\frac{u_\varphi}{u_0}\right); \tag{4,6}$$

$$\frac{v_\psi}{u_0} = \frac{u_\psi}{u_0}, \quad \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{v_\psi}{u_0}\right) = \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{u_\psi}{u_0}\right), \ldots, \frac{\partial^m}{\partial\psi^m}\left(\frac{v_\psi}{u_0}\right) = \frac{\partial^m}{\partial\psi^m}\left(\frac{u_\psi}{u_0}\right) \tag{4,7}$$

$$(\psi = \lambda; \quad \varphi_1 < \varphi < \varphi_2),$$

и аналогично для $\psi = -\lambda$. Степень гладкости сшивания, т. е. числа l и m, зависит от числа взятых функций $q(\varphi)$ в (4,4). Простой вид краевых условий, удовлетворяющий всем качественным требованиям, получим, взяв в (4,4) две функции q_1 и q_2; тогда, приняв в (4,6) $l = 2$, а в (4,7) $m = 1$, получим четыре уравнения, из которых, исключая неизвестные функции q_1 и q_2, получим два краевых условия вида:

$$\frac{v_\varphi}{u_0} - \lambda \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{v_\varphi}{u_0}\right) + \frac{1}{2}\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\left(\frac{v_\varphi}{u_0}\right) = -1 \quad (\psi = \lambda;\ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2); \tag{4,8}$$

$$\frac{v_\psi}{u_0} + \frac{1}{2}\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial\psi}\left(\frac{v_\varphi}{u_0}\right) - \frac{1}{3}\lambda^3 \frac{\partial^3}{\partial\varphi\,\partial\psi^2}\left(\frac{v_\varphi}{u_0}\right) = 0 \quad (\psi = \lambda;\ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2), \tag{4,9}$$

и аналогично для $\psi = -\lambda$. Параметр λ должен быть взят достаточно малым, чтобы профиль u_φ в пограничном слое можно было хорошо апроксимировать полиномом (4,4), но он не может быть взят слишком малым, ибо тогда условие относительной малости $\mathbf{v}$ не будет выполнено. Таким образом, хотя λ — по своему смыслу — не является вполне определенной величиной, для него существует оптимальный интервал значений; пригодны лишь те значения, для которых $|v_\varphi| < 1$ везде во внешнем потоке, включая контур C.

§ 5. Пусть $\mathbf{R}'$ — сила, действующая на единицу высоты цилиндрического тела со стороны стационарного потока вязкой жидкости. Введем

$$\mathbf{R} \equiv \frac{\mathbf{R}'}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 2R}, \tag{5,1}$$

u_∞ — размерная скорость на бесконечности, ρ — плотность. Тогда $R_x = c_x$ — коэффициент лобового сопротивления, а R_y — безразмерная подъемная сила, если Ox параллельна потоку на бесконечности.

Теория почти безотрывного обтекания дает следующее выражение для главной части $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2, \tag{5,2}$$

где

$$\mathbf{R}_1 = -\oint\limits_C p_0 \mathbf{n}\, dl = \frac{1}{2}\oint\limits_C u_0^2 \mathbf{n}\, dl \tag{5,3}$$

классическая часть общей силы, ее можно выразить по первой формуле Чаплыгина, и

$$\mathbf{R}_2 = -\oint\limits_C p_1 \mathbf{n}\, dl - \frac{1}{\mathrm{Re}}\oint\limits_C \Omega \mathbf{k}\, dl, \tag{5,4}$$

интегрирование ведется по контуру C; $\mathbf{n}$ — орт внешней к нему нормали; $\mathbf{k}$ — орт по касательной; dl — элемент дуги, сделанный безразмерным делением на R; $\Omega = \mathrm{rot}_z\, \mathbf{v}$. $\mathbf{R}_2$ — добавка к классической силе, которую дает изложенная теория, $\mathbf{R}_2$ дает лобовое сопротивление.

Если контур симметричен и обтекается потоком на бесконечности, параллельным его оси симметрии, то $R_{2y} = 0$, и из (5,4) получаем коэффициент сопротивления, который в переменных φ, ψ принимает вид:

$$c_x = R_x = 2 \int\limits_{\substack{-\infty \\ \psi=\lambda}}^{\infty} \left(p_1 u_{0y} - \frac{\Omega}{\mathrm{Re}} u_{0x}\right) \frac{d\varphi}{u_0^2}. \tag{5,5}$$

Для результирующего момента теория дает $L = L_1 + L_2$, где L_1 — классическая часть, выражаемая по второй формуле Чаплыгина, а

$$L_2 = \oint\limits_C \left\{ -p\,[\mathbf{r}, \mathbf{n}]_z + \frac{2}{\mathrm{Re}}[\mathbf{v}, \mathbf{n}]_z - \frac{\Omega}{\mathrm{Re}}[\mathbf{r}, \mathbf{k}]_z \right\} dl. \tag{5,6}$$

В изложенной теории преодолевается традиция, идущая от Л. Прандтля, и центр тяжести рассмотрения переносится во внешний поток. При выполнении линеаризации уравнений Навье — Стокса опорой служат результаты классической гидродинамики идеальной жидкости, которая есть не что иное, как теория почти безотрывного обтекания в нулевом приближении, т. е. в пренебрежении вязкостью.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
18 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Thom, Proc. Roy. Soc., A, **141**, 651 (1933).