Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 4

МАТЕМАТИКА

С. Г. МИХЛИН

ОБ АЛГОРИТМЕ ШВАРЦА *

(Представлено академиком В. И. Смирновым 23 I 1951)

Рассмотрим задачу об интегрировании уравнения эллиптического типа

$$Lu = -\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + B(x)u = 0 \tag{1}$$

в конечной области $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$. Части границ областей Ω_1 и Ω_2, принадлежащие границе S области Ω, мы обозначим, соответственно, через S_1 и S_2, так что $S = S_1 + S_2$. Далее, мы обозначим через S_1' и S_2' те части границ областей Ω_1 и Ω_2, которые лежат внутри областей Ω_2 и Ω_1, соответственно.

Уравнение (1) будем интегрировать при краевом условии

$$u\,|_S = \psi\,|_S, \tag{2}$$

где ψ — некоторая функция из $L_2^{(1)}(\Omega)$. Мы примем, что на множестве функций, обращающихся в нуль на S, оператор Lu — положительно определенный. Это будет иметь место, если, например,

$$\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}^{(x)}\xi_i\xi_k \geqslant C\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2, \qquad C = \mathrm{const} > 0,$$

и $B(x) > -\lambda_1$, где λ_1 — наименьшее собственное число оператора

$$-\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$$

при краевом условии $u\,|_S = 0$.

Поставленную нами задачу можно решать, пользуясь алгоритмом Шварца**. Именно, мы строим в Ω_1 интеграл $u_1(x)$ уравнения (1) по краевому условию***

$$u_1\,|_{S_1+S_1'} = \psi\,|_{S_1+S_1'}\,; \tag{3}$$

* В настоящей заметке мы сохраняем все обозначения и условия нашей заметки (1).

** Применяя алгоритм Шварца, мы принимаем, что краевая задача для каждой из областей Ω_1 и Ω_2 разрешима в следующем смысле: какова бы ни была функция $\varphi(x) \in L_2^{(1)}(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, существует интеграл уравнения (1), дважды непрерывно дифференцируемый внутри Ω_k и совпадающий (в смысле (2)) с $\varphi(x)$ на границе Ω_k.

*** Мы принимаем, что краевое условие удовлетворяется в смысле (2).

далее мы строим последовательность $\{u_n(x)\}$ интегралов того же уравнения, причем $u_{2k+1}(x)$ определены в Ω_1, а $u_{2k}(x)$ — в Ω_2. Эти интегралы удовлетворяют следующим краевым условиям:

$$u_{2k+1}\big|_{S_1} = \psi\big|_{S_1}, \qquad u_{2k+1}\big|_{S_1'} = u_{2k}\big|_{S_1'}; \tag{4}$$

$$u_{2k}\big|_{S_2} = \psi\big|_{S_2}, \qquad u_{2k}\big|_{S_2'} = u_{2k-1}\big|_{S_2'}. \tag{5}$$

С. Л. Соболев [3] обратил внимание на то, что u_n являются решениями некоторой вариационной задачи, и на этом построил доказательство сходимости алгоритма Шварца для уравнения Лапласа и уравнений теории упругости; ему удалось доказать, если говорить об уравнении Лапласа, сходимость $u_n(x) \to u_0(x)$ ($u_0(x)$ — решение задачи) в метрике $L_2(\Omega)$.

Б. Н. Шибаев [4], действуя методом С. Л. Соболева, получил тот же результат для уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, где λ — постоянная, меньшая, чем первое собственное число оператора Лапласа, при краевом условии $u\big|_S = 0$.

Мы докажем, что *сходимость* $u_n(x) \to u_0(x)$ *имеет место для уравнения* (1), *и притом не только в метрике* $L_2(\Omega)$, *но и равномерно в любой замкнутой подобласти* Ω.

Доопределим функции $u_n(x)$, положив

$$u_{2k+1}(x) \equiv u_{2k}(x), \qquad x \in \Omega - \Omega_1;$$

$$u_{2k}(x) \equiv u_{2k-1}(x), \qquad x \in \Omega - \Omega_2.$$

Нетрудно видеть, что тогда $u_n(x)$ реализует минимум функционала *

$$D(u) = \int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} + B(x) u^2 \right\} d\Omega \tag{6}$$

при краевых условиях

$$u\big|_S = \psi\big|_S, \qquad u\big|_{S_1'} = u_{2k}\big|_{S_1'}, \tag{7}$$

или

$$u\big|_S = \psi\big|_S, \qquad u\big|_{S_2'} = u_{2k-1}\big|_{S_2'}; \tag{8}$$

краевому условию (7) удовлетворяет функция u_{2k+1}, а условию (8) — функция u_{2k}. Отсюда следует, что $D(u_n)$ убывает с возрастанием n и стремится к некоторому пределу при $n \to \infty$.

Введем в рассмотрение гильбертово пространство H_0, элементы которого суть функции из $L_{(2)}^{(1)}(\Omega)$, которые могут быть апроксимированы (в метрике $L_{(2)}^{(1)}(\Omega)$) функциями, равными нулю в некоторой пограничной полоске; норму в H_0 определим формулой

$$|u|^2 = D(u).$$

Функции $u_{2n}(x) - u_1(x)$ принадлежат H_0; их последовательность в этом пространстве ограничена, так как

$$|u_{2n} - u_1|^2 = D(u_{2n} - u_1) \leqslant 2\{D(u_{2n}) + D(u_1)\} \leqslant 4D(u_1). \tag{9}$$

Отсюда следует, что в H_0 указанная последовательность слабо компактна. Выделим из нее слабо сходящуюся подпоследовательность $u_{2n_i}(x) - u_1(x)$; слабый предел этой подпоследовательности обозначим

---

* Для простоты считаем все величины действительными.

через $u_0(x) - u_1(x)$. Так как $u_0(x) - u_1(x) \in H_0$, то в обобщенном смысле (см. ([4]))

$$u_0\big|_S = u_1\big|_S = \psi\big|_S,$$

т. е. u_0 удовлетворяет краевому условию нашей задачи.

По теореме Реллиха (см. ([2])), $u_{2n_i}(x)$ сильно сходится в $L_2(\Omega)$ к $u_0(x)$. Далее, функции $u_{2n_i}(x)$ удовлетворяют уравнению (1) как в Ω_2, так и в $\Omega - \Omega_2$; по теореме 1 нашей заметки ([1]), $u_0(x)$ также удовлетворяет этому уравнению в Ω_2 и в $\Omega - \Omega_2$.

Докажем теперь, что $u_{2n_i+1}(x) \to u_0(x)$ в метрике $L_2(\Omega)$.

При любом действительном α функция $\alpha u_{n+1}(x) + (1-\alpha)u_n(x)$ удовлетворяет тем же краевым условиям, что и функция $u_{n+1}(x)$, поэтому

$$D(\alpha u_{n+1} + (1-\alpha)u_n) \geqslant D(u_{n+1}).$$

Величина $D(\alpha u_{n+1} + (1-\alpha)u_n)$ достигает минимума при $\alpha = 1$. Отсюда легко усмотреть, что

$$D(u_{n+1}, u_n) = D(u_{n+1}). \tag{10}$$

Как обычно, здесь $D(u, v)$ — билинейный функционал, отвечающий квадратичному функционалу $D(u)$.

Теперь

$$D(u_n - u_{n+1}) = D(u_n) - 2D(u_{n+1}, u_n) + D(u_{n+1}) = D(u_n) - D(u_{n+1}).$$

Так как $u_{2n_i+1} - u_{2n_i}$ обращается в нуль на S, а на множестве такого рода функций оператор Lu — положительно определенный, то

$$\|u_{2n_i+1} - u_{2n_i}\|^2 \leqslant C' D(u_{2n_i+1} - u_{2n_i}) = C'\{D(u_{2n_i}) - D(u_{2n_i+1})\} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.$$

Здесь $C' = \text{const}$ и норма берется в метрике $L_2(\Omega)$. Из последнего равенства вытекает, что $\|u_{2n_i} - u_0\| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$.

Как и выше, можно доказать, что $u_0(x)$ удовлетворяет уравнению (1) в каждой из областей Ω_1 и $\Omega - \Omega_1$. Имея в виду, что $u_0(x)$ удовлетворяет этому уравнению в областях Ω_2 и $\Omega - \Omega_2$, мы найдем, что это уравнение имеет функцию $u_0(x)$ своим интегралом везде в Ω.

Было уже отмечено, что $u_0(x)$ удовлетворяет краевому условию (2). Таким образом, $u_0(x)$ решает поставленную нами задачу. В силу единственности ее решения последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится в $L_2(\Omega)$ и имеет $u_0(x)$ своим пределом.

Чтобы закончить исследование, остается указать, что, в силу теоремы 1 заметки ([1]), $u_n(x) \to u_0(x)$ равномерно в любой замкнутой подобласти Ω.

Поступило
16 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Михлин, ДАН, 77, № 3 (1951). [2] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, гл. VII, 1945. [3] С. Л. Соболев, ДАН, 4 (13), № 6 (1936). [4] Б. Н. Шибаев, Применение альтернирующего метода к колебательному уравнению, Автореферат диссертации, Л., 1950.