

С. Н. МЕРГЕЛЯН

О ТЕОРЕМЕ М. А. ЛАВРЕНТЬЕВА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 1 II 1951)

Одной из центральных задач теории равномерных приближений является исследование множеств, на которых функции тех или иных классов разлагаются в равномерно сходящиеся ряды по функциям из более простых классов, в частности, по полиномам. Фундаментальное значение в этом направлении имеет результат, полученный в 1934 г. М. А. Лаврентьевым⁽¹⁾ и формулируемый следующим образом.

Теорема. Любая функция $f(z)$, непрерывная на нигде не плотном ограниченном континууме K , не разбивающем плоскость, разлагается в ряд по полиномам от z , равномерно сходящийся к $f(z)$ на K .

В настоящей заметке приводится новое и достаточно простое доказательство сформулированной теоремы.

Так как произвольную непрерывную функцию можно на любом ограниченном и замкнутом множестве E равномерно аппроксимировать многочленами от x и y , то теорему достаточно доказать для полиномов $\Pi(x, y)$ от x и y .

Пусть

$$\Pi(x, y) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где u и v — вещественные функции.

Через C_ε обозначим аналитическую кривую, гомеоморфную окружности, охватывающую континуум K ; D_ε — конечная область, ограниченная C_ε . Линию C_ε можно выбрать так, чтобы

$$\text{mes}(D_\varepsilon - K) < \varepsilon$$

(в качестве C_ε можно взять, например, достаточно близкие к K линии уровня функции Грина дополнения к K).

Формула*

$$\Pi(x, y) = \Pi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{\Pi(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi} \iint_{D_\varepsilon} \frac{u_\xi - v_\eta + i(u_\eta + v_\xi)}{\zeta - z} d\xi d\eta,$$
$$\zeta = \xi + i\eta,$$

справедлива для любого полинома Π и выводится весьма просто с помощью формулы Грина. Пусть

$$F(\zeta) = u_\xi - v_\eta + i(u_\eta + v_\xi), \quad M > \max_{\zeta \in K} |F(\zeta)|.$$

* Заметим, что для решения задач теории равномерных приближений эта формула эффективно применялась в работе М. В. Келдыша⁽²⁾.

В классе однолистных областей B , имеющих наперед заданную площадь $\tau > 0$, интеграл

$$\int \int_{\zeta \in B} \frac{ds}{|\zeta - z|}$$

принимает наибольшее значение для круга с центром в z площади τ , так что

$$\left| \int \int_{\zeta \in D_\varepsilon} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} ds - \int \int_{\zeta \in K} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} ds \right| < M \int \int_{\zeta \in D_\varepsilon - K} \frac{ds}{|\zeta - z|} \leq 2M\sqrt{\pi\varepsilon};$$

поэтому для доказательства возможности равномерной аппроксимации $\Pi(x, y)$ полиномами от z на K достаточно приблизить функцию

$$R(z) = \int \int_{\zeta \in K} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} ds$$

с любой степенью точности полиномами от z^* .

Лемма. Для любого $\varepsilon > 0$ и произвольной $\zeta \in K$ существует полином $P_\zeta(z)$ от z , для которого

$$|P_\zeta(z)| < \frac{A}{|\zeta - z|}, \quad z \in K; \quad (1)$$

$$\left| P_\zeta(z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| < B\varepsilon, \quad z \in K, \quad |z - \zeta| \geq \varepsilon, \quad (2)$$

где A, B — абсолютные постоянные, а степень полинома $P_\zeta(z)$ ограничена числом $N = N(\varepsilon)$, зависящим только от ε .

Положим для простоты $\zeta = 0$ и в круге $|\zeta| < \varepsilon/4$ выберем точку $\zeta_1 \in SK$; через l обозначим простую дугу с концами в ζ_1 и в некоторой точке ζ_2 , $|\zeta_2| = 3\varepsilon/4$, $l \in SK$. Пусть d — область с аналитической границей, гомеоморфной окружности, содержащая l , замыкание которой расположено в $|\zeta| < \varepsilon$, и не имеет общих точек с K . Пусть также функция $w = \varphi(z)$ ($z = \psi(w)$) осуществляет конформное отображение $|z| > \varepsilon$ на дополнение к \bar{d} , при котором бесконечно удаленные точки соответствуют друг другу.

Рассмотрим отклонение $\varphi(z)$ от функции вида cz при $|z| \gg \varepsilon$. Под c_1, c_2, c_3, \dots будем понимать абсолютные постоянные.

При растяжении $w = \frac{1}{\varepsilon}z$ область d перейдет в D . Функция

$$\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\varepsilon z) = \Phi(z) = az + b + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

отображает $|z| > 1$ на дополнение к \bar{D} , причем, с одной стороны, $D \in \bar{E}(|z| < 1)$, с другой стороны, диаметр D больше $1/2$; поэтому для числа a , равного емкости области D , выполняется неравенство

$$0 < c_1 < |a| < c_2 < \infty.$$

Функция $\Phi(z) - az$ аналитична в $|z| > 1$ и на границе ограничена двойкой, поэтому для коэффициентов ее разложения в ряд Тейлора около бесконечно удаленной точки имеем оценку

$$|b| < c_3, \quad |a_k| < c_3, \quad k = 1, 2, \dots$$

* Если плоская мера K равна нулю, то доказательство теоремы Лаврентьева на этом кончается, так как при этом $R(z) \equiv 0$.

Таким образом, при $|z| > 2$

$$|\Phi(z) - az| < c_3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|z|^k} < c_4.$$

Переходя к $\varphi(z)$, отсюда находим

$$|\varphi(z) - az| < c_4 \varepsilon, \quad |z| > 2\varepsilon.$$

Так как отношение $\varphi(z)/z$ является функцией, аналитической в области $|z| > \varepsilon$, и на границе $|\varphi(z)/z| < 1$, то

$$|\varpi| = |\varphi(z)| < |z|$$

и

$$|\varpi - a\psi(\varpi)| < c_4 \varepsilon, \quad |\varpi| > 2\varepsilon.$$

Вследствие этого для $|\varpi| > \sqrt[3]{\varepsilon} > 2\varepsilon$ имеем

$$\left| \frac{1}{\varpi} - \frac{1}{a\psi(\varpi)} \right| < \frac{|\varpi - a\psi(\varpi)|}{|a||\varpi||\psi(\varpi)|} < c_5 \frac{\varepsilon}{|\varpi|^2} < c_5 \sqrt[3]{\varepsilon}.$$

Функция $\frac{1}{a\psi(w)}$ аналитична вне \bar{d} , в частности, на континууме K ; в силу того, что континуум не разбивает плоскость, найдется область, содержащая K , в которой $\frac{1}{a\psi(w)}$ аналитична. На основании теоремы Рунге, существует полином $Q_0(z)$, для которого $\left| Q_0(w) - \frac{1}{a\psi(w)} \right| < \varepsilon$, $w \in K$, так что, заменяя w на z , имеем

$$\left| Q_0(z) - \frac{1}{z} \right| < c_6 \sqrt[3]{\varepsilon}, \quad z \in K, \quad |z| > \sqrt[3]{\varepsilon}, \quad |Q_0(z)| < \frac{c_7}{|z|}.$$

Таким образом, для каждой точки $\zeta \in K$ можно построить полином $Q_\zeta(z)$, удовлетворяющий (1) и (2).

Из соображений непрерывности легко заключить, что для любой точки $\zeta_0 \in K$ можно указать ее окрестность $|\zeta - \zeta_0| < \delta = \delta(\zeta_0)$ так, чтобы неравенства

$$|Q_\zeta(z)| < \frac{A}{|\zeta - z|}, \quad \left| Q_\zeta(z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| < B\alpha, \quad |z - \zeta_0| \geq \alpha$$

выполнялись не только для $\zeta = \zeta_0$, но и для всех $\zeta \in K$, принадлежащих $\delta(\zeta_0)$ — окрестности ζ_0 .

Согласно лемме Гейне — Бореля, возможно найти конечное число точек $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ таких, что любая точка $\zeta \in K$ попадает хотя бы в один из кругов $|\zeta - \zeta_i| < \delta(\zeta_i)$; пусть, для определенности, ζ покрыта кругами с центрами в $\zeta_{k_1}, \zeta_{k_2}, \dots, \zeta_{k_s}$ и

$$m = k_\zeta = \min \{k_1, k_2, \dots, k_s\}.$$

Так как все числа k_1, k_2, \dots, k_s различны, то для каждой точки ζ однозначно определено целое число m .

Положим теперь

$$P_\zeta(z) = Q_{\zeta_m}(z).$$

Полиномы $P_\zeta(z)$ удовлетворяют всем трем условиям, необходимым для доказательства леммы.

Если обозначить $\iint_{\zeta \in K} F(\zeta) P_{\zeta}(z) ds = P(z)$, то для полинома от z $P(z)$

имеем

$$\begin{aligned} |R(z) - P(z)| &< M \iint_{\substack{\zeta \in K \\ |\zeta - z| < \varepsilon}} \left| \frac{1}{\zeta - z} - P_{\zeta}(z) \right| ds + M \iint_{\substack{\zeta \in K \\ |\zeta - z| > \varepsilon}} \left| \frac{1}{\zeta - z} - P_{\zeta}(z) \right| ds < \\ &< 2\pi M(A + 1)\varepsilon + MB \operatorname{mes} K \cdot \varepsilon; \end{aligned}$$

так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то теорема доказана.

Сектор математики и механики
Академии наук Арм.ССР

Поступило
30 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. А. Лаврентьев, *Actualités scient. et industrielles*, Paris, No. 441 (1936).
² М. В. Келдыш, *Матем. сборн.*, 16 (58), № 3 (1945).