Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 4

МАТЕМАТИКА

Академик П. Л. КАПИЦА

ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧЕТНЫХ СТЕПЕНЕЙ КОРНЕЙ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Для вычисления значений корней бесселевых функций и для некоторых задач математической физики нужно уметь вычислять сумму отрицательных четных степеней этих корней.

Эйлер дал для вычисления этих сумм прямой метод, который заключается в том, что разлагают бесселеву функцию по степеням переменной и приравнивают той же функции, представленной в виде бесконечного произведения, включающего значения корней. В этом тождестве коэффициенты при одинаковых степенях переменной равны, и это дает возможность вычислить искомые суммы. На практике этот метод ведет к сложным вычислениям. Чтобы облегчить их, Релей [1] брал логарифмы от обеих частей тождества, используя разложение $\ln(1+x)$ и представляя их в виде ряда. Так он смог вычислить сумму до 10-й степени. Мы даем здесь менее прямой путь вычисления этих сумм, но ведущий к возможности вычислять их значительно проще. Кроме того, этим же способом можно вычислять суммы корней некоторых простых уравнений, содержащих бесселевы функции.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — последовательные значения корней бесселевой функции; искомые суммы мы обозначим так:

$$\sigma_\nu^{(r)} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \lambda_k^{-2r}; \quad J_\nu(\lambda_k) = 0. \tag{1}$$

Разложим бесселеву функцию $J_{\nu-1}(\beta x)$ в ряд Дини по функциям $J_{\nu-1}(\lambda_k x)$. Ряд будет иметь следующий вид:

$$J_{\nu-1}(\beta x) = a_0 x^{\nu-1} + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k J_{\nu-1}(\lambda_k x). \tag{2}$$

В данной задаче весьма существенна роль члена с a_0, который, как известно ([2], стр. 655), необходим в этом разложении. Коэффициент a_0 определяется:

$$a_0 = 2\nu \int_0^1 J_{\nu-1}(\beta x)\, x^\nu\, dx = 2\nu\beta^{-1} J_\nu(\beta); \tag{3}$$

коэффициент a_k будет:

$$a_k = 2\int_0^1 J_{\nu-1}(\beta x)\, J_{\nu-1}(\lambda_k x)\, x\, dx \Big/ \int_0^1 J_{\nu-1}^2(\lambda_k x)\, x\, dx. \tag{4}$$

Рекуррентная формула для $J_{\nu-1}(\lambda_k)$ с учетом (1) будет:

$$J'_{\nu-1}(\lambda_k) = \frac{\nu-1}{\lambda_k} J_{\nu-1}(\lambda_k). \tag{5}$$

Учитывая это выражение и применяя обычные рекуррентные соотношения, окончательно получаем:

$$J_{\nu-1}(\beta x) = 2\nu\beta^{-1} J_\nu(\beta)\, x^{\nu-1} - 2\beta J_\nu(\beta) \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 - \beta^2} \frac{J_{\nu-1}(\lambda_k x)}{J_{\nu-1}(\lambda_k)}. \tag{6}$$

Полагая в этом выражении $x = 1$ и $\beta \to 0$, после простого преобразования получаем уже известное [1] выражение:

$$\sigma_\nu^{(1)} = \frac{1}{2^2(\nu+1)}. \tag{7}$$

Для получения сумм более высокого порядка помножим члены разложения (6) на $x^\nu dx$, проинтегрируем от 0 до x, потом опять помножим на $x\,dx$ и тоже проинтегрируем от 0 до x и т. д.; проинтегрировав $m+1$ раз, положим $x = 1$. Получаем:

$$\beta^{-m-1} J_{\nu+m}(\beta) = \frac{\beta^{-1} J_\nu(\beta)}{2^m(\nu+1)\cdots(\nu+m)} - 2\beta J_\nu(\beta) \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{\lambda_k^{m+1}(\lambda_k^2-\beta^2)} \frac{J_{\nu+m}(\lambda_k)}{J_{\nu-1}(\lambda_k)}. \tag{8}$$

Поскольку λ_k есть корень функции Бесселя ν-го порядка, то, используя полиномы Ломмеля ([2], стр. 322), можно написать:

$$J_{\nu+m}(\lambda_k) = -J_{\nu-1}(\lambda_k) R_{m-1,\,\nu+1}(\lambda_k). \tag{9}$$

Подставляя это значение в разложение, после некоторого преобразования и полагая $\beta \to 0$, получаем:

$$\frac{m\,\Gamma(\nu+1)}{2^{2m+2}(\nu+1)\,\Gamma(\nu+m+2)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{\lambda_k^{2m+2}} \sum_{n=0}^{n\leqslant 1/2(m-1)} (-1)^n \frac{(m-1-n)!\,\Gamma(\nu+m-n)}{2^{2n}\, n!\,(m-1-2n)!\,\Gamma(\nu+n+1)} \lambda_k^{2n}. \tag{10}$$

Это выражение годится для значений $m \geqslant 1$, и, давая m значения 1, 2, 3, ..., последовательно находим $\sigma_\nu^{(r)}$ для всех четных степеней, начиная с четырех.

Таким образом просто получаем все значения, уже полученные Релеем. Кроме того, можно вычислить следующие, которые прежним методом не были вычислены:

$$\begin{aligned} \sigma_\nu^{(6)} &= \frac{21\nu^3 + 181\nu^2 + 513\nu + 473}{2^{11}(\nu+1)^6(\nu+2)^3(\nu+3)^2(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)}, \\ \sigma_\nu^{(7)} &= \frac{33\nu^3 + 329\nu^2 + 1081\nu + 1145}{2^{12}(\nu+1)^7(\nu+2)^3(\nu+3)^2(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)(\nu+7)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Сумму $\sigma_\nu^{(8)}$ вычислил Кэли ([2], стр. 554) методом, дающим возможность вычислять только в случае, когда r есть степень двойки. Мы повторили результат Кэли нашим методом и еще вычислили $\sigma_\nu^{(9)}$ и $\sigma_\nu^{(10)}$, которые и привожу:

$$\begin{aligned} \sigma_\nu^{(9)} &= \frac{715\nu^6 + 16567\nu^5 + 158568\nu^4 + 798074\nu^3 + 2217079\nu^2 + 3212847\nu + 1893046}{2^{17}(\nu+1)^9(\nu+2)^4(\nu+3)^3(\nu+4)^2(\nu+5)(\nu+6)(\nu+7)(\nu+8)(\nu+9)}, \\ \sigma_\nu^{(10)} &= \frac{2431\nu^8 + 80425\nu^7 + 1152851\nu^6 + 9315367\nu^5 + 46240675\nu^4 + 143917279\nu^3 + 273583353\nu^2 + 289891557\nu + 130934488}{2^{19}(\nu+1)^{10}(\nu+2)^5(\nu+3)^3(\nu+4)^2(\nu+5)^2(\nu+6)(\nu+7)(\nu+8)(\nu+9)(\nu+10)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Проверка этих значений производится, полагая $\nu = {}^1/_2$; тогда эти суммы выражаются через числа Бернули ([2], стр. 554). При большом показателе r с точностью, достаточной для ряда задач, величина суммы определяется первым корнем λ_1, и он может быть просто вычислен извлечением корня степени $2r$ из всей суммы.

Известно [2], что разложение Дини возможно по корням δ_k следующего уравнения:

$$\delta_k J_\nu'(\delta_k) - HJ_\nu(\delta_k) = 0, \quad \nu + {}^1/_2 \geqslant 0. \tag{13}$$

Обозначим:

$$\eta_\nu^{(r)} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \delta_k^{-2r}. \tag{14}$$

Эти суммы можно найти тем же способом через разложение в ряд. При разложении по корням уравнения (13) следует различать три случая, во втором и третьем из них нужно вводить различные члены с a_0. Эти случаи следующие:

$$\text{а) } \nu > H \geqslant 0; \quad \text{б) } \nu = H; \quad \text{в) } \nu < H. \tag{15}$$

Мы разберем первый случай, когда $\nu > H \geqslant 0$; он наиболее простой, так как в разложении (2) отсутствует член с a_0 (3). Разложим функцию $J_\nu(\beta x)$ по $J_\nu(\delta_k x)$; после обычных преобразований ряд примет вид:

$$J_\nu(\beta x) = 2\left[\beta J_{\nu-1}(\beta) - (\nu + H) J_\nu(\beta)\right] \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\delta_k^2}{(\delta_k^2 - \beta^2)\left[\delta_k^2 - (\nu^2 - H^2)\right]} \frac{J_\nu(\delta_k x)}{J_\nu(\delta_k)}. \tag{16}$$

Положим $x = 1$ и $\beta \to 0$; тогда после преобразования получим:

$$\varphi_\nu^{(0)} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{\delta_k^2 - (\nu^2 - H^2)} = \frac{1}{2(\nu - H)}. \tag{17}$$

Помножим разложение (16) на $x^{\nu+1}dx$ и проинтегрируем от 0 до x, опять помножим на $x\,dx$ и опять проинтегрируем от 0 до x, и так интегрируем m раз. Получаем, положив $x = 1$:

$$\beta^{-m} J_{\nu+m}(\beta) =$$
$$= 2\left[\beta J_{\nu-1}(\beta) - (\nu + H) J_\nu(\beta)\right] \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{\delta_k^{m-2}(\delta_k^2 - \beta^2)\left[\delta_k^2 - (\nu^2 - H^2)\right]} \frac{J_{\nu+m}(\delta_k)}{J_\nu(\delta_k)}. \tag{18}$$

Из выражения (13) получаем, используя рекуррентное отношение

$$J_{\nu-1}(\delta_k) = \frac{\nu + H}{\delta_k} J_\nu(\delta_k). \tag{19}$$

Используя это равенство, получаем следующую связь между бесселевыми функциями различного порядка, выраженную через полиномы Ломмеля:

$$J_{\nu+m}(\delta_k) = \left[R_{m,\nu}(\delta_k) - \frac{\nu + H}{\delta_k} R_{m-1,\nu+1}(\delta_k)\right] J_\nu(\delta_k). \tag{20}$$

Подставляя это значение в (18) и полагая $\beta \to 0$, после преобразования получаем:

$$\frac{\Gamma(\nu + 1)}{2^{2m}(\nu - H)\,\Gamma(m + \nu + 1)} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{\delta_k^{2m}\left[\delta_k^2 - (\nu^2 - H^2)\right]} \sum_{n=0}^{n \leqslant m/2} (-1)^n \left[m(\nu - H) + \right.$$
$$\left. + 2n(H + m - n)\right] \frac{(m - n - 1)!\,\Gamma(\nu + m - n)}{n!\,(m - 2n)!\,\Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{\delta_k}{2}\right)^{2n}. \tag{21}$$

Из этого выражения последовательными вычислениями получаем ряд выражений типа:

$$\varphi_\nu^{(r)} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{\delta_k^{2r}\,[\delta_k^2 - (\nu^2 - H^2)]}\,. \tag{22}$$

Искомые суммы получаем следующим путем:

$$\eta_\nu^{(r)} = \varphi_\nu^{(r-1)} - (\nu^2 - H^2)\,\varphi_\nu^{(r)}. \tag{23}$$

Привожу несколько сумм $\eta_\nu^{(r)}$, вычисленных этим методом:

$$\eta_\nu^{(1)} = \frac{\nu + 2 - H}{2^2(\nu+1)(\nu - H)}; \qquad \eta_\nu^{(2)} = \frac{4(\nu+1) + (\nu+2-H)^2}{2^4(\nu+1)^2(\nu+2)(\nu-H)^2}; \tag{24}$$

$$\eta_\nu^{(3)} = \frac{4(4+3\nu-H)(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3) - (\nu+H)(4+3\nu-H)^2(\nu+3) - (\nu+H)(\nu-H)^2(\nu+1)}{2^6(\nu+1)^3(\nu+2)^2(\nu+3)(\nu-H)^3}\,.$$

Практический интерес имеет случай, когда $H = 0$, тогда корни δ_k становятся корнями производной бесселевой функции. При этом выражения для $\eta_\nu^{(r)}$ значительно упрощаются.

В приведенном в (15) втором случае условия для разложения, когда $\nu = H$, корни δ_k становятся корнями бесселевой функции порядка $\nu + 1$, что соответствует задаче, разобранной вначале.

В третьем случае (15), когда $\nu < H$, уравнение (13) будет иметь еще два чисто мнимых корня $\pm i\delta_0$ ((2), стр. 531). Из теории разложения следует (2), что в этом случае член a_0 тоже не равен нулю и выражается через величину δ_0. Поступая аналогично предыдущим примерам, и тут можно тоже получить суммы $\eta_\nu^{(r)}$.

Интересно отметить, что суммы $\sigma_\nu^{(r)}$ и $\eta_\nu^{(r)}$ можно также получать, разлагая x^ν в ряд соответственно по функциям $J_{\nu-1}(\lambda_k x)$ и $J_{\nu-1}(\delta_k x)$. Это был путь, по которому Релей (3) в одной из задач со сферическими резонаторами нашел, в нашем обозначении, величину $\varphi_{1/2}^{(0)}$, а Ламб (4) обобщил этот результат для $\varphi_\nu^{(0)}$ (17). Эти работы дальнейшего развития не имели, хотя вычисления корней этого рода трансцендентных уравнений находились в кругу интересов математической физики того времени. Повидимому, задержка в развитии этого метода была связана с тем, что тогда не было найдено значение добавочного члена с a_0 при разложении в ряды Дини. Значительно позднее, в 1908 г., необходимость введения этих членов была указана Бриджеманом (5), однако и в ряде более поздних руководств это не указывается. На получение ограниченного результата Ламба и Релея отсутствие добавочного члена влияния не имело.

Поступило
4 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. W. S. Rayleigh, Sci. Papers, **1**, 190 (1899). [2] Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 1, 1949. [3] J. W. S. Rayleigh, The Theory of Sound, 1896, § 332. [4] H. Lamb, Proc. London Math. Soc., **15**, 273 (1884). [5] P. W. Bridgeman, Phil. Mag., **16**, 947 (1908).