Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 4

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД и Б. М. ЛЕВИТАН

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПО ЕГО СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 5 II 1951)

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение, заданное на интервале $(0, \infty)$,

$$y'' + (\lambda - q(x))\, y = 0. \tag{1}$$

Функция $q(x)$ предполагается непрерывной на каждом конечном интервале.

Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h \tag{2}$$

с произвольным фиксированным действительным h.

Известно [1], что существует монотонная, ограниченная в каждом конечном интервале функция $\rho(\lambda)$ (спектральная функция уравнения (1)) так, что для любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом имеет место равенство

$$\int_0^\infty f^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} E^2(\lambda)\, d\rho(\lambda). \tag{3}$$

Здесь $E(\lambda)$ — преобразование Фурье — Планшереля функции $f(x)$, т. е.

$$E(\lambda) = \underset{n \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^n f(x)\, \varphi(x, \lambda)\, dx.$$

В настоящей заметке рассматривается следующая задача. Задана монотонная, ограниченная в каждом конечном интервале функция $\rho(\lambda)$. Требуется определить, существует ли уравнение вида (1), имеющее $\rho(\lambda)$ своей спектральной функцией, и указать способ вычисления коэффициента $q(x)$.

Единственность решения этой задачи впервые установил В. А. Марченко [2]. Затем вопросом разрешимости задачи занимался М. Г. Крейн, который в двух интересных заметках [3,4] свел задачу к созданной им теории продолжения положительно определенных функций.

В настоящей заметке задача о восстановлении уравнения по его спектральной функции решается с помощью элементарных средств, а именно сводится к линейному интегральному уравнению. Кроме того, даются в известном смысле необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция $\rho(\lambda)$ была спектральной функцией.

2. Как известно, ([5], [6]) существует такая непрерывная функция $K(x, t)$ $(t \leqslant x)$, что

$$\varphi(x, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\,x + \int_0^x K(x, t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt. \tag{4}$$

Если подставить (4) в уравнение (1), то после легких преобразований получим *:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - q(x)K = \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}, \quad \left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad \frac{dK(x, x)}{dx} = \frac{1}{2}q(x), \quad K(0, 0) = h. \tag{5}$$

Таким образом, зная $K(x, t)$, мы знаем $q(x)$ и граничные условия (2).

Решая уравнение (4) относительно $\cos\sqrt{\lambda}\,x$, мы получим

$$\cos\sqrt{\lambda}\,x = \varphi(x, \lambda) - \int_0^x K_1(x, t)\varphi(t, \lambda)\,dt. \tag{4'}$$

Пусть уравнение (1) задано и $\rho(\lambda)$ — отвечающая ему спектральная функция. Положим $\sigma(\lambda) = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} + \rho(\lambda)$ для $\lambda \geqslant 0$ и $\sigma(\lambda) = \rho(\lambda)$ для $\lambda < 0$. Далее положим **

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x \sin\sqrt{\lambda}\,y}{\lambda}\,d\sigma(\lambda), \quad f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,\partial y}. \tag{6}$$

Можно доказать, что *функция* $K_1(x, t)$ *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$f(x, y) = K_1(x, y) - \int_0^y K_1(x, t)K_1(y, t)\,dt, \tag{I}$$

а функция $K(x, t)$ — *интегральному уравнению*

$$f(x, y) + \int_0^x f(y, t)K(x, t)\,dt + K(x, y) = 0. \tag{II}$$

3. Предположим теперь, что задана монотонная функция $\rho(\lambda)$ и требуется определить, существует ли уравнение (1) с заданным $\rho(\lambda)$, а также найти это уравнение, т. е. вычислить $q(x)$ и h. Очевидно, что достаточно определить функцию $K(x, t)$, так как, зная $K(x, t)$, мы найдем $q(x)$ по формуле $dK(x, x)/dx = {}^1/_2\, q(x)$.

Предположим, что функция $\rho(\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям:

1°. Для всякого x существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{0} \cosh\sqrt{|\lambda|}\,x\,d\rho(\lambda).$$

2°. Функция $a(x) = \int_1^\infty \frac{\cos\sqrt{\lambda}\,x}{\lambda}\,d\sigma(\lambda)$ имеет на полуоси $x \geqslant 0$ непрерывную четвертую производную.

* Разрешимость задачи (5) является наиболее простым доказательством утверждения, задаваемого равенством (4).

** Существование и непрерывность функций $F(x, y)$ и $f(x, y)$ легко доказываются.

Построим по формулам (6) функцию $f(x, y)$ и рассмотрим интегральное уравнение (II). При фиксировании x уравнение (II) есть уравнение Фредгольма.

Теорема 1. *Если функция* $\rho(\lambda)$ *в каком-то конечном интервале имеет бесчисленное множество точек роста, то уравнение* (II) *разрешимо при всяком* $x > 0$.

Теорема 2. *Если функция* $\rho(\lambda)$ *удовлетворяет условиям** $1°—2°$, *то существует непрерывная функция* $q(x)$ *и такое действительное число* h, *что* $\rho(\lambda)$ *является спектральной функцией уравнения* (1) *с граничным условием* (2). *Обратно, если функция* $q(x)$ *имеет непрерывную производную, то отвечающая ей спектральная функция* $\rho(\lambda)$ *удовлетворяет условиям* $1°—2°$.

Мы видим, что условия, наложенные на спектральную функцию $\rho(\lambda)$, относятся лишь к ее поведению на бесконечности. Поэтому из теоремы 2 можно сделать следующий интересный вывод. Спектральная функция $\rho(\lambda)$ может быть на конечном интервале произвольной наперед заданной монотонной функцией. Более того, пусть $\rho(\lambda)$ на конечном интервале произвольна. Продолжим ее так, чтобы, начиная с некоторого $\lambda_0 > 0$, она имела вид $\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}$, а для $\lambda < 0$ удовлетворяла условию $1°$. Тогда $f(x, y)$, а значит, и $K(x, y)$ и, следовательно, $q(x)$ будут аналитическими функциями. Таким образом, можно построить уравнение (1) с аналитическим коэффициентом $q(x)$ и любым поведением на конечном интервале спектральной функции $\rho(\lambda)$. Заметим, что для существования уравнения с бесконечно дифференцируемым $q(x)$ необходима и достаточна бесконечная дифференцируемость функции $a(x)$.

4. Спектральную функцию $\rho(\lambda)$ мы будем называть ортогональной спектральной функцией, если для любого конечного интервала $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$ функция

$$E_\Delta(x) = \int_\Delta \varphi(x, \lambda)\, d\rho(\lambda) \in L_2(0, \infty)$$

и для любых двух конечных интервалов Δ и Δ' имеет место равенство

$$\int_0^\infty E_\Delta(x)\, E_{\Delta'}(x)\, dx = \int_{\Delta\Delta'} d\rho(\lambda).$$

Известно, что уравнение (1) может иметь и неортогональные спектральные функции. Сформулируем условие для ортогональной спектральной функции.

Теорема 3. *Если функция* $\rho(\lambda)$ *удовлетворяет условию* $2°$ *и существует такое число* $\alpha < 2$, *что для всех достаточно больших* $x > 0$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{|\lambda|}x}\, d\rho(\lambda) < e^{x^\alpha}, \tag{7}$$

то $\rho(\lambda)$ *— ортогональная спектральная функция.*

Условие (7) заведомо выполняется, если множество точек роста функции $\rho(\lambda)$ ограничено снизу.

5. Наши методы позволяют также изучить спектральные функции, отвечающие классической задаче Штурма — Лиувилля. Пусть уравнение (1) задано в интервале $(0, l)$ и, кроме граничного условия (2),

* Мы предполагаем, так же как и в теореме 1, что $\rho(\lambda)$ имеет бесчисленное множество точек роста в некотором конечном интервале. Случай дискретного спектра разбирается ниже.

дано также граничное условие $y'(l)+Hy(l)=0$, где H — произвольное действительное число. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ собственные числа рассматриваемой краевой задачи. Эти числа являются точками роста функции $\rho(\lambda)$. Как известно, числа λ_n связаны с числом l асимптотическим равенством

$$\sqrt{\lambda_n}=\frac{\pi}{l}n+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{8}$$

Не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что числа λ_n неотрицательны. Обозначим скачки функции $\rho(\lambda)$ через $1/\rho_n$. Для ρ_n известна следующая асимптотическая формула

$$\rho_n=\frac{l}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{9}$$

Рассмотрим теперь обратную задачу.

Пусть заданы числа λ_n и $\rho_n>0$, для которых выполнены следующие два условия:

1°. λ_n и ρ_n удовлетворяют асимптотическим формулам (8) и (9).

2°. Функция

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\rho_n}\frac{\cos\sqrt{\lambda_n}x}{\lambda_n}n-\frac{\cos n\frac{\pi}{l}x}{n^2}\right]$$

имеет для $x\leqslant 2l$ непрерывную четвертую производную (при $x=2l$ преполагается лишь, что существуют производные слева).

Теорема 4. *Условия* 1° *и* 2° *достаточны для существования уравнения с непрерывной* $q(x)$ *на* $(0, l)$, *с собственными значениями* λ_n *и интегралами квадратов собственных функций (нормированных согласно* (2)), *равными* ρ_n. *Эти условия являются также необходимыми, если* $q(x)$ *дифференцируема.*

В частности, для всяких последовательностей λ_n и $\rho_n>0$, для которых

$$\sqrt{\lambda_n}=\frac{\pi}{l}n+\frac{b_1}{n}+\frac{b_2}{n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right),\quad \rho_n=\frac{2}{l}+\frac{a_1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

условия 2° выполнены. Этот результат можно улучшить. Таким образом, грубо говоря, для существования уравнения достаточно, чтобы для λ_n и ρ_n имели место классические асимптотические разложения.

Поступило
19 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, М., 1950. [2] В. А. Марченко, ДАН, **72**, № 3 (1950). [3] М. Г. Крейн, ДАН, **76**, № 1 (1951). [4] М. Г. Крейн, ДАН, **76**, № 3 (1951). [5] Б. М. Левитан, Усп. матем. наук, **4** (29), в. 1 (1944). [6] А. Я. Повзнер, Матем. сборн., **23** (63) (1948). [7] G. Borg, Acta Math., 78, No. 1 (1946).