Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 4

МАТЕМАТИКА

М. И. ВИШИК

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 27 I 1951)

1. Рассматривается краевая задача, состоящая в решении в области D с границей Γ дифференциального уравнения

$$Lf \equiv \sum_{i,\,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\,\frac{\partial}{\partial x_k} f\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} f + c(x) f = h \tag{1}$$

(с достаточно гладкими коэффициентами и $c(x) \leqslant 0$) при краевом условии

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma} = Qf\Big|_{\Gamma} + Ff\Big|_{\Gamma}, \tag{2}$$

где Q — линейный эллиптический дифференциальный оператор на Γ; F — линейный ограниченный оператор в пространстве $\mathfrak{L}_2(\Gamma)$ (функций, суммируемых в квадрате по Γ); $\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial}{\partial x_i}\cos(n,\ x_k)$, n — внешняя нормаль к Γ. Для простоты мы предположим, что оператор Q — второго порядка. Представим оператор Q в виде суммы двух операторов:

$$Qf(S) = Tf(S) + Vf(S) \quad (S \in \Gamma),$$

где

$$Tf(S) = \frac{D(\lambda)}{D(\Gamma)} \sum_{i,\,k=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_k}\left(\frac{D(\Gamma)}{D(\lambda)} A^{ik}\frac{\partial}{\partial \lambda_i} f(S)\right) - f(S)\,^*, \tag{3}$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1})$ — локальная система координат на Γ; $D(\Gamma)/D(\lambda)$ — отношение элемента площади Γ к элементу площади в пространстве параметров λ; V — дифференциальный оператор первого порядка. При замене локальных координат операторы T и V преобразуются по известным правилам.

Мы предполагаем выполненным условие эллиптичности оператора Q в следующем виде:

$$\int_{\Gamma} \sum_{i,\,k=1}^{n-1} A^{ik}\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}\frac{\partial f}{\partial \lambda_k}\,d\Gamma \geqslant \mu \int_{\Gamma} \sum_{i,\,k=1}^{n-1} g^{ik}\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}\frac{\partial f}{\partial \lambda_k}\,d\Gamma, \tag{4}$$

* Все рассуждения, приведенные ниже, остаются в силе, с очевидными изменениями, в том случае, если вместо оператора Q указанного вида в краевом условии написать оператор $-Q$.

где g^{ik} — контравариантные компоненты метрического тензора поверхности Г.

2. Введем в рассмотрение оператор типа градиента по поверхности Г:

$$Gf(S) = (\mathrm{grad}_\Gamma f(S),\ f(S)),$$

т. е. оператор, сопоставляющий функции $f(S)$, заданной на Г, элемент, первые $n-1$ компонент которого составляют поверхностный градиент функции $f(S)$: $\mathrm{grad}_\Gamma f(S)$, а последняя компонента — сама функция $f(S)$.

Скалярное произведение для элементов $Gf(S)$ и $Gf'(S)$ определим так:

$$\{Gf(S),\ Gf'(S)\} = -\int_\Gamma Tf\cdot f' d\Gamma = \int_\Gamma \left[\sum_{i,\ k=1}^{n-1} A^{ik}\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}\frac{\partial f'}{\partial \lambda_k} + ff'\right] d\Gamma. \qquad (5)$$

Функции $f(S)$ мы будем считать элементами пространства $\mathfrak{L}_2(\Gamma)$. Тогда оператор G отображает некоторое всюду плотное множество $\Omega_G \subset \mathfrak{L}_2(\Gamma)$ в пространство элементов вида $Gf(S)$ со скалярным произведением (5). Замыкание оператора G мы будем обозначать той же буквой G, а область изменения этого замыкания — через R_G. Очевидно, R_G замкнуто в метрике (5) (так как G имеет, очевидно, ограниченный обратный G^{-1}). Оператор, сопряженный к оператору типа градиента G, мы обозначим через G^*. Оператор G^* отображает всюду плотное множество $\Omega_{G^*} \subset R_G$ на все $\mathfrak{L}_2(\Gamma)$ (так как $G^{*-1} = (G^{-1})^*$). Согласно формулам (5) и (3), $G^*G = -T$.

Операторы G и G^* обладают следующими свойствами:

а) *G и G^* имеют вполне непрерывные обратные G^{-1} и G^{*-1}.*

б) *Оператор $G^{*-1}VG^{-1}$, где V — дифференциальный оператор первого порядка, входящий в Q, вполне непрерывен.*

3. Для рассмотрения свойств поставленной в начале заметки краевой задачи поступим так, как это указано в моей заметке ([2]): вычтем из обеих частей краевого условия (2) выражение $Pf|_\Gamma$:

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big|_\Gamma - Pf\Big|_\Gamma = (Q + F - P)f\Big|_\Gamma; \qquad (6)$$

P — оператор, сопоставляющий функции $f|_\Gamma$ функцию $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma$, где $u(x)$ — решение первой краевой задачи для уравнения $Lu = 0$ при краевом условии $u|_\Gamma = f|_\Gamma$.

Преобразуем оператор, стоящий в правой части краевого условия (6), к следующему виду:

$$Q + F - P = T + V + F - P = -G^*G + V + F - P =$$
$$= -G^*(E - G^{*-1}VG^{-1} - G^{*-1}FG^{-1} + G^{*-1}PG^{-1})\,G. \qquad (7)$$

Доказывается, что

в) *Оператор $G^{*-1}PG^{-1}$ вполне непрерывен* (в простейшем случае это следует из одного неравенства, доказанного нами в ([1])).

Из формулы (7) и свойств а), б) и в) следует, что $Q + F - P$ — регулярно разрешимый оператор, т. е. для уравнений

$$(Q + F - P)\varphi(S) = \chi(S) \quad \text{и} \quad (Q^* + F^* - P^*)\psi(S) = \chi'(S) \quad (S \in \Gamma)$$

справедливы три теоремы, аналогичные трем теоремам Фредгольма.

Отсюда, согласно п. 3 моей заметки ([2]) вытекает, что для краевой задачи, поставленной в начале заметки ($Lf(x) = h(x)$ при краевом условии (2)), и для сопряженной с ней краевой задачи $\left(Mg(x) = h'(x)\right.$ в области D при сопряженном краевом условии на Г: $\left.\frac{\partial g}{\partial \nu^*} = Q^*g|_\Gamma + F^*g|_\Gamma\right)$

имеют место три теоремы, аналогичные трем теоремам Фредгольма.

4. Если однородное уравнение на границе Г

$$(Q+F-P)\varphi(S)=0 \tag{8}$$

имеет только нулевое решение, то, как легко видеть, оператор $Q+F-P$ имеет вполне непрерывный обратный $(Q+F-P)^{-1}$. Следовательно, согласно п. 3 моей заметки ([1]), в этом случае *краевая задача* (1), (2) *разрешима при любой правой части* $h(x)\in\mathfrak{L}_2(D)$, *и оператор* L, *рассматриваемый на функциях* $f(x)$, *удовлетворяющих краевому условию* (2), *имеет вполне непрерывный обратный*.

Если в дифференциальном уравнении (1) все коэффициенты $b_i(x)\equiv 0$, то оператор P — положительно определенный. Если, кроме того, дифференциальный оператор Q и ограниченный оператор F — отрицательно определенные*, то уравнение (8), очевидно, имеет только нулевое решение, и, следовательно, в этом случае краевая задача (1), (2) разрешима и соответствующий ей оператор имеет вполне непрерывный обратный (т. е., грубо говоря, существует функция Грина, соответствующая этой задаче, с обычной особенностью).

5. Пусть коэффициенты $b_i(x)\equiv 0$; тогда дифференциальный оператор L — самосопряженный в классическом смысле.

Если дифференциальный оператор Q — *самосопряженный* (*в классическом смысле*) *и ограниченный оператор* F — *самосопряженный* (*в* $\mathfrak{L}_2(\Gamma)$ *в смысле теории операторов*), *то оператор* L, *рассматриваемый только на функциях, удовлетворяющих в некотором, обобщенном, смысле краевому условию* (2), *является самосопряженным в* $\mathfrak{L}_2(D)$ *в смысле теории операторов*.

6. Заключения п. п. 3, 4, 5 нами доказаны и в том случае, когда в краевом условии (2) отсутствует дифференциальный оператор Q.

Поступило
25 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Вишик, Усп. матем. наук, **6**, в. 2 (1951). [2] М. И. Вишик, ДАН, **77**, № 3 (1951).

* Оператор $Qf(S)$ будет заведомо отрицательно определенным, если он равен сумме первого слагаемого правой части (3) и $C(S)f(S)$, где $C(S)<0$ для $S\in\Gamma$.