Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 4

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

О ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЯХ

Назовем функцию $\Phi(x) > 0$ **весовой** функцией ($\Phi(x) \in W$), если всякая непрерывная ($-\infty < x < \infty$) функция $f(x)$, удовлетворяющая единственному условию $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x)/\Phi(x)) = 0$, равномерно приближаема многочленами на всей оси при весе $1/\Phi(x)$, т. е. если при любом $\varepsilon > 0$ можно построить такие многочлены $P(x)$, что

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon\Phi(x) \quad (-\infty < x < \infty). \tag{1}$$

В монографиях ([1], [2]) показано, что *целая функция*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k} \quad (a_0 > 0, \quad a_k \geqslant 0) \tag{2}$$

*в том и только в том случае является весовой функцией, если род ее выше нуля**. Отсюда следует, что всякая функция $\Phi(x)$ будет весовой, если существует такая четная целая функция (2) рода выше нуля, что

$$F(x) \leqslant \Phi(x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

Благодаря этому простому замечанию из цитированной теоремы может быть выведена следующая весьма общая теорема.

Теорема 1. *Если для данной функции $\Phi(x) > 0$ ряд*

$$S_0 = \sum_{1}^{\infty} \lambda_n,$$

где

$$\lambda_n = \min_{-\infty < x < \infty} \frac{\sqrt[n]{\Phi(x)}}{|x|}, \tag{3}$$

расходится, то $\Phi(x) \in W$.

Для доказательства строим целую** функцию

---

* Там же доказана теорема, означающая, по принятой мною позднее ([4]) терминологии, что в случае, когда $F(x)$ нулевого рода, она является майорантой конечного роста ($F(x) \in \mathfrak{M}$).

** Функция $F_1(x)$ не была бы целой лишь при условии, что последовательность монотонно убывающих чисел $\{\lambda_n\}$ имеет предел $b > 0$; но в этом случае $\Phi(x) > |xb|^n$, так что $\Phi(x) = \infty$ для всех $|x| > 1/b$; поэтому неравенство (1) ($-\infty < x < \infty$) осуществляется вследствие классической теоремы Вейерштрасса для **конечного** отрезка

$$F_1(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} (\lambda_{2k} x)^{2k} \quad (a_0 = \min \Phi(x)), \tag{4}$$

которая, согласно теореме, установленной мной во втором добавлении к монографии ([1]) (см. также статью ([3])), не может быть нулевого рода, если ряд S_0 расходится. Но, с другой стороны, из определения чисел λ_n следует, что $(\lambda_{2k} x)^{2k} \leqslant \Phi(x)$ при всех x $(-\infty < x < \infty)$ и любых $k > 0$; поэтому из (4) получаем *

$$F_1(x) \leqslant a_0 + \Phi(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} < 2\,\Phi(x). \tag{5}$$

Следствие 1. *Если $\Phi_0(x)$ — майоранта ([4,5]) конечного или квази-конечного роста, $\Phi_0(x) \in \mathfrak{M}^*$, то она не может быть весовой функцией и соответствующий ей ряд S_0 сходится.*

Действительно, на основании леммы 2 заметки ([4]) и ее распространения на майоранты квази-конечного роста ([5]) всякая предельная функция последовательности многочленов $|P(x)| \leqslant \Phi_0(x)$ должна быть функцией нулевой (или конечной) степени, вследствие чего осуществление неравенства (1) невозможно для произвольной функции $f(x)$. Поэтому по теореме 1 расходимость S_0 невозможна для $\Phi_0(x) \in \mathfrak{M}^*$.

Лемма 1. *Если целая функция $F(x)$ вида* (2), *то интеграл*

$$H = \int_1^{\infty} \frac{\log F(x)}{x^2}\, dx \tag{6}$$

сходится в том и только в том случае, когда $F(x)$ нулевого рода.

Что интеграл H сходится, когда $F(x)$ нулевого рода, доказано в монографии ([2]) и еще раньше в статье ([6]). С другой стороны, если H сходится, то ** $\lim\limits_{|x|=\infty} \dfrac{\log F(x)}{x} = 0$ и, следовательно, функция $F(x)$ — нулевой степени, а потому ([5]) $F(x) \in \mathfrak{M}^*$. Отсюда, благодаря цитированной выше теореме ([1,2]), следует, что $F(x)$ нулевого рода.

Теорема 2. *Какова бы ни была четная функция $\Phi(x) = e^{p(x)} > 0$, если интеграл* (6), *соответствующий этой функции, сходится, или даже, если только*

$$H_R = \int_1^{R} \frac{p(x)}{x^2}\, dx \tag{6^{bis}}$$

ограничен сверху при $R \to \infty$, то ряд $S_0 = \sum\limits_1^{\infty} \lambda_n$, где λ_n определяется формулой (3), *сходится.*

$(-1/b,\ 1/b)$. Заметим что ряд S_0 сходится и расходится одновременно с интегралом $I_0 = \int\limits_1^{\infty} \lambda(n)\, dn$, если формулу (3) для $\lambda = \lambda(n)$ распространить на все значения $n \geqslant 1$.

* Отсюда видно, что теорема 1 не шире моей старой вышеупомянутой теоремы.

** Учитывая, что $F(x) > 1$, $F'(x) > 0$, из сходимости H и из равенства $\dfrac{\log F(R)}{R} + \int\limits_1^R \dfrac{\log F(x)}{x^2}\, dx = \log F(1) + \int\limits_1^R \dfrac{F'(x)}{xF(x)}\, dx$ заключаем, что обе его части стремятся к конечному пределу, а потому $\lim\limits_{R=\infty} \dfrac{\log F(R)}{R} = 0$.

Действительно, допустим, напротив, что ряд S_0 расходится при ограниченном H_R. Тогда, построив целую функцию $F_1(x)$ выше нулевого рода по формуле (4), мы получили бы, вследствие (5):

$$\int_1^R \frac{\log F_1(x)}{x^2}\,dx < \int_1^R \frac{p(x)}{x^2}\,dx + \log 2,$$

что противоречит лемме 1.

Для обращения теоремы 2 нам придется внести некоторые ограничения. Мы предположим функцию $\Phi(x) > 0$ монотонно возрастающей до бесконечности (при $|x| \to \infty$). Кроме того, фиксируем лишь какую-нибудь определенную последовательность значений $\{\Phi(a_n)\}$, где $a_n = a + bn$ и $n > 0$ — любое целое число (для простоты письма примем $a = 0$, $b = 1$). Назовем последовательность $\{\Phi(a_n)\} \in N$ нормально возрастающей, если ее можно интерполировать при помощи такой непрерывно дифференцируемой функции $\Phi(x) = e^{p(x)}$, что

$$x\,\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = xp'(x) = n(x) \tag{7}$$

также монотонно возрастает к бесконечности при $|x| \to \infty$; в таком случае функцию $\Phi(x) \in N$ также будем называть нормально возрастающей.

Теорема, обратная теореме 2, *справедлива для функций* $\Phi(x) \in N$.

Действительно, при всех $n > n_0$ достаточно больших величина $x_n = x(n)$, для которой осуществляется (7), однозначно определяется из уравнения (7), причем (так как можно принять, что $\Phi(x) > 1$) имеем

$$\lambda_n > \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x(n)},$$

а потому из сходимости ряда $S_0 = \Sigma\lambda_n$ тем более следует сходимость ряда

$$S_1 = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{x(n)},$$

эквивалентная ограниченности при $R \to \infty$ интеграла

$$\int_1^R \frac{n'(x)}{x}\,dx = \int_1^R \frac{p'(x)}{x}\,dx + [p'(R) - p'(1)] > \int_1^R \frac{p(x)}{x^2}\,dx + \frac{p(R)}{R} - p(1) - p'(1).$$

Следовательно, интеграл

$$H_R = \int_1^R \frac{p(x)}{x^2}\,dx < \int_1^R \frac{n'(x)dx}{x} + p(1) + p'(1)$$

также ограничен (имеет предел) при $R \to \infty$.

Следствие 2. *Если четная функция* $\Phi(x) = e^{p(x)} \in N$, *то ряды* S_1 *и* S_0 *сходятся (и расходятся) одновременно с интегралом* (6^{bis}).

(Напомним, что, вследствие теоремы 2, из сходимости интеграла H вытекает сходимость S_0 и, тем более, S_1 даже и без ограничения $\Phi(x) \in N$.)

Теорема 3. *Если $F(x)$ — целая функция вида* (2), *то условие, необходимое и достаточное для того, чтобы она была нулевого рода, состоит в том, чтобы соответствующий ей ряд S_0 (и S_1) был сходящимся.*

Действительно, $F(x) \in N$, так как в данном случае $n(x)$ возрастает при всех $x > 0$ вследствие

$$F^2(x)n'(x) = [xF''(x) + F'(x)]\ F(x) - x[F'(x)]^2 = \sum_{k>l}^{\infty} 4(k-l)^2 a_k a_l x^{2k+2l-1} > 0.$$

Поэтому наше утверждение вытекает из леммы 1 и следствия 2.

Из следствия 2 получаем

Следствие 3. *Если $|G(x)| \in N$ есть модуль целой четной функции конечной степени, то она является либо весовой функцией ($|G(x)| \in W$), либо майорантой конечного роста ($|G(x)| \in \mathfrak{M}$). При этом $|G(x)| \in W$, когда соответствующий ряд S_0 расходится, и $|G(x)| \in \mathfrak{M}$, когда S_0 сходится.*

Первое утверждение вытекает из теоремы 1, второе * — из следствия 2 и известного результата ([7–9]) Б. Я. Левина, согласно которому $\mathfrak{M}^* \equiv \mathfrak{M}$, если $G(x)$ — целая функция конечной степени.

Поступило
9 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bernstein, Leçons sur les propriétés extrémales, Paris, 1926. [2] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937. [3] С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьк. мат. об-ва (1924). [4] С. Н. Бернштейн, ДАН, **60**, 949 (1948). [5] С. Н. Бернштейн, ДАН, **65**, 117 (1949). [6] S. Bernstein, Bull. de la Soc. Math. de France (1924). [7] С. Бернштейн, ДАН, **66**, 545 (1949). [8] Б. Я. Левин, ДАН, **65**, 605 (1949). [9] Б. Я. Левин, Изв. АН СССР, сер. матем., **14**, 45 (1950).

* В заметке ([5]) мною введено понятие антимайоранты, которое определено следующим образом: $H(x) \geqslant 0$ называется антимайорантой, если неравенство

$$|G_p(x)| \leqslant H(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

совместимо для совокупности функций $G_p(x)$ данной конечной степени p со свойством производной $\sup\limits_{a<x<b} |G_p{}'(x)| = \infty$. Как нетрудно видеть, всякая весовая функция $\Phi(x) \in W$ является антимайорантой. Действительно, если в равенстве (1) функция $f(x)$ не удовлетворяет никакому условию Липшица в промежутке (a, b), то последовательность многочленов $P(x) = G_0(x)$, для которой $\lim\limits_{-\infty<x<\infty} P(x) = f(x)$, удовлетворяет условию $|P(x)| < c\,\Phi(x)$ (c — постоянная), причем $\sup\limits_{a<x<b} |P'(x)| = \infty$.

Из следствия 3 следует, что если $|G(x)| \in N$, где $G(x)$ — четная функция конечной степени, то $|G(x)|$ только тогда будет антимайорантой, когда $|G(x)| \in W$. Однако на любую функцию $G(x)$ конечной степени это утверждение не распространяется, а именно: при сходимости S_0 функция $|G(x)|$ может быть антимайорантой, не будучи весовой (например ([5]), в случае $G(x) = e^x + 1$).