Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 3

АСТРОНОМИЯ

Д. А. ФРАНК-КАМЕНЕЦКИЙ

КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И АВТОКОЛЕБАНИЯ ЗВЕЗД

(Представлено академиком Н. Н. Семеновым 23 I 1951)

Представим полную энергию звезды E как сумму колебательной энергии W и статической энергии U. Для каждого элемента массы dM колебательная энергия $w\,dM$ определяется как значение кинетической энергии в момент прохождения через состояние колебательного равновесия; статическая энергия $u\,dM$ — как сумма тепловой и гравитационной энергии в том же состоянии.

Условия затухания или самовозбуждения колебаний определяются знаком величины ΔW — изменения колебательной энергии за цикл:

$$\Delta W = \Delta E - \Delta U = \int\limits_M dM \oint \left(\varepsilon + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} F \right) dt - \int\limits_M \Delta u\, dM, \tag{1}$$

где ε — скорость выделения энергии на единицу массы; ρ — плотность; F — вектор удельного потока тепла.

Член $\Delta U = \int\limits_M \Delta u\, dM$ есть изменение статической энергии вследствие смещения состояния колебательного равновесия. В общем случае:

$$\Delta u = T_e \Delta S - \frac{1}{\rho_e} \operatorname{div} (P_e \Delta r), \tag{2}$$

где $S\,dM$ — энтропия данного элемента массы; r — его радиус-вектор; ρ_e — плотность; P_e — давление; T_e — температура в состоянии колебательного равновесия.

Если состояния колебательного равновесия для всех элементов массы считать совпадающими по времени, т. е. если пренебречь в интеграле влиянием сдвига фаз (локализованного в узкой зоне близ поверхности звезды), то от интегрирования по массе можно перейти к интегрированию по объему:

$$\Delta U = \int\limits_M T_e \Delta S\, dM - \int\limits_V \operatorname{div} (P_e \Delta r)\, dV = \int\limits_M T_e \Delta S\, dM, \tag{3}$$

так как второй интеграл есть внешняя работа, совершаемая звездой при изменении состояния колебательного равновесия, т. е. тождественный нуль. В этом простейшем случае:

$$\Delta W = \Delta E - \int\limits_M T_e \Delta S\, dM = \int\limits_M dM \oint \left(1 - \frac{T_e}{T} \right) \left(\varepsilon + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} F \right) dt, \tag{4}$$

или, в сферически симметричном случае:

$$\Delta W = \int\limits_M dM \oint \left(1 - \frac{T_e}{T} \right) \left(\varepsilon - \frac{dH}{dM} \right) dt, \tag{5}$$

где H — полный тепловой поток через сферическую поверхность, заключающую массу M.

Состояние равновесия устойчиво, если вблизи него $\Delta W < 0$, неустойчиво, если $\Delta W > 0$. Если в последнем случае существуют конечные колебания, для которых ΔW обращается в нуль, то это будут автоколебания.

Все рассматриваемые в литературе критерии могут быть получены как частные случаи из критерия (5). Так, для малых колебаний (5) переходит в общий критерий устойчивости С. Росселанда [1]. Если считать в (5) все величины не зависящими от пространственных координат, то получится критерий автоколебаний С. А. Жевакина [2].

Для дальнейшего приближенного рассмотрения введем эффективные температурные показатели: $p = d \ln \varepsilon / d \ln T$ для тепловыделения и $q = d \ln H / d \ln T$ для теплоотвода, где производные берутся при той связи между T, ρ, r, dT/dr, которая имеет место в процессе колебания (везде, кроме узкой зоны близ поверхности звезды, эта связь соответствует адиабатическим подобным изменениям состояния).

Полагая, в грубом приближении, p и q постоянными в пространстве и времени, и считая, что выделение энергии происходит близ центра звезды, получаем из (5):

$$\Delta W = L_e \oint \left[\vartheta_0^{p-1} (\vartheta - 1) - \vartheta_1^{q-1} (\vartheta_1 - 1) + \frac{\vartheta_1^{q-1} - \vartheta_0^{q-1}}{q-1} \right] dt, \tag{6}$$

где $\vartheta = T / T_e$; индекс 0 относится к центру, 1 — к периферии звезды; L_e — равновесная светимость.

Для малых колебаний $\vartheta = 1 + A \cos \omega t$. Если A мала, но pA и qA могут уже и не быть малыми, то, заменяя ϑ на $e^{A \cos \omega t}$, получаем приближенно:

$$\Delta W = \frac{2\pi}{\omega} L_e \left[A_0 I_0' (p-1) A_0 - A_1 I_0' (q-1) A_1 + \frac{I_0 (q-1) A_1 - I_0 (q-1) A_0}{q-1} \right], \tag{7}$$

где I_0 — бесселева функция нулевого порядка мнимого аргумента.

Для совсем малых амплитуд получаем критерий устойчивости в виде:

$$\Delta W = \frac{\pi}{\omega} L_e \left[(p-1) A_0^2 - \frac{q-1}{2} (A_0^2 + A_1^2) \right]. \tag{8}$$

Если $\varepsilon \backsim \rho^{\mu} T^{\nu}$, то, поскольку близ центра звезды колебания всегда адиабатичны, $p = \nu + \frac{\mu}{\gamma - 1}$, где γ — показатель адиабаты. Если выделение энергии происходит посредством барьерных ядерных реакций, то для каждой отдельной реакции

$$\varepsilon_i \backsim \rho \tau^2 e^{-\tau},$$

где $\tau \backsim T^{-1/3}$; отсюда при $\gamma = 5/3$:

$$p_i = \frac{\tau}{3} + \frac{5}{6}. \tag{9}$$

Но если процесс выделения энергии проходит в несколько последовательных стадий, то эффективное значение температурного показателя p для колебательного процесса становится зависящим от частоты колебаний.

Пусть концентрация каждого из промежуточных продуктов подчиняется кинетическому уравнению:

$$\frac{dx_i}{dt} = k_{i-1} x_{i-1} - k_i x_i, \tag{10}$$

где кинетические коэффициенты k_i зависят от температуры и плотности, и, следовательно, в процессе колебания являются осциллирующими функциями времени.

Общее решение уравнения (9):

$$x_i = e^{-y} \int\limits_{y_0}^{y} \frac{k_{i-1} x_{i-1}}{k_i} e^y dy,$$

где $y = \int k_i \, dt$. Для стационарного колебания $y = K_i t$;

$$x_i = K_i e^{-K_i t} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{k_{i-1} x_{i-1}}{k_i} e^{K_i t} dt,$$

где K_i — среднее значение k_i.

Разлагая осциллирующую функцию $k_{i-1} x_{i-1} / k_i$ в ряд Фурье:

$$\frac{k_{i-1} x_{i-1}}{k_i} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\omega t,$$

получим:

$$x_i = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{\cos n\omega t - n \dfrac{\omega}{K_i} \sin n\omega t}{1 + n^2 \dfrac{\omega^2}{K_i^2}} . \tag{11}$$

Скорость тепловыделения $\varepsilon = \sum\limits_i Q_i k_i x_i$, где Q_i — теплоты реакций. Отсюда эффективный температурный показатель:

$$p = \frac{d \ln \varepsilon}{d \ln T} = \frac{\sum\limits_i Q_i K_i X_i \, d \ln k_i x_i \,/\, d \ln T}{\sum\limits_i Q_i K_i X_i}, \tag{12}$$

где X_i — среднее значение x_i.

Для малых колебаний из (11):

$$\frac{d \ln k_i x_i}{d \ln T} = p_i + \frac{d \ln x_i}{d \ln T} = p_i + \frac{p_{i-1} - p_i + d \ln x_{i-1} / d \ln T}{\sqrt{1 + \omega^2 / K_i^2}}, \tag{13}$$

где

$$\frac{d \ln x_{i-1}}{d \ln T} = \frac{p_{i-2} - p_{i-1} + d \ln x_{i-2} / d \ln T}{\sqrt{1 + \omega^2 / K_i^2}} . \tag{14}$$

Здесь $p_i = d \ln k_i / d \ln T$ — температурные показатели отдельных стадий, определяемые из (9).

Рассмотрим очевидные предельные случаи.

Для медленных стадий $(K_j \ll \omega)$:

$$\frac{d \ln x_j}{d \ln T} = 0, \qquad \frac{d \ln k_j x_j}{d \ln T} = p_j.$$

Для быстрых стадий $(K_i \gg \omega)$:

$$\frac{d \ln k_i x_i}{d \ln T} = p_{i-1} + \frac{d \ln x_{i-1}}{d \ln T} .$$

При этом, если предшествующая стадия медленная, то $d\ln x_{l-1}/d\ln T=0$ откуда $d\ln k_l x_l/d\ln T=p_{l-1}$. В этом случае тепловыделение быстрой стадии контролируется предшествующей медленной. Если быстрой стадии предшествует быстрая же, то $d\ln k_l x_l/d\ln T=p_{l-2}+$ $+d\ln x_{l-2}/d\ln T$. В этом случае обе быстрые стадии будут контролироваться предшествующей им, и т. д., пока мы не дойдем до стадии, для которой

$$\frac{d\ln x_l}{d\ln T}<p_{l-1}-p_l+\frac{d\ln x_{l-1}}{d\ln T}.$$

Результаты, относящиеся к обоим предельным случаям, остаются в силе и для больших амплитуд. Подробное доказательство этого довольно очевидного положения можно найти в ([3],[4]).

Оставляя в стороне частный случай, когда K порядка ω, во всех остальных случаях можем подразделить все стадии на медленные ($K_j\ll\omega$) и быстрые ($K_l\gg\omega$); тогда:

$$p=\frac{\sum_j(\Sigma Q)_j K_j X_j p_j}{\sum_j(\Sigma Q)_j K_j X_j}, \tag{15}$$

где индекс j относится только к медленным стадиям, а $(\Sigma Q)_j$ означает сумму теплот всех стадий от данной и до следующей медленной. Если все медленно реагирующие вещества находятся в стационарных концентрациях, то

$$p=\frac{\sum_j(\Sigma Q)_j p_j}{\sum_l Q_l}. \tag{16}$$

Если медленной стадией является β-процесс, для которого $p_j=0$, то эффективное значение температурного показателя для колебательного процесса может оказаться существенно ниже стационарного его значения. Примером является водородный цикл, в котором основное выделение энергии контролируется медленным β-превращением Be^7 в Li^7 (K-захват).

Таким образом, можно объяснить: апериодическую устойчивость; возникновение колебательной неустойчивости при низких центральных температурах (возрастание p) и конечную предельную амплитуду колебаний ($p<q$), если только принять, что основным источником энергии звезд является водородный цикл и что относительная амплитуда пульсаций (в противоположность общепринятым ([1],[5],[6]) воззрениям) возрастает от поверхности к центру звезды. Для обоснования последнего вывода необходимо рассмотреть пространственное распределение амплитуд с последовательным учетом неадиабатичности колебаний вблизи поверхности звезды, что и является задачей нашей дальнейшей работы.

Поступило
23 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Rosseland, Pulsation Theory of Variable Stars, Oxford, 1949. [2] С. А. Жевакин, ДАН, 58, № 3 (1947). [3] Д. А. Франк-Каменецкий, ЖФХ, 14, 695 (1940). [4] Э. И. Адирович, ДАН, 61, № 3 (1948). [5] R. Cowling, Month. Not. Roy. Astr. Soc., 94, 768 (1934); 96, 42 (1935). [6] P. Ledoux, Astroph. Journ., 94, 537 (1941).