Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 3

МАТЕМАТИКА

М. И. МОРОЗОВ

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ РАВНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ПОСРЕДСТВОМ ФУНКЦИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КЛАССОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 I 1951)

Пусть функция $y=F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n)$ от x и n параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$ определена в области G: $0 \leqslant x \leqslant 1$*, $\overline{a}_i < a_i < \overline{\overline{a}}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, где все или некоторые из $\overline{a}_i$ суть вещественные числа или равны $-\infty$, а $\overline{\overline{a}}_i$ — вещественные числа или равны $+\infty$.

Областью $D(F_x)$ будем называть множество значений, принимаемых функцией $y=F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n)$ при некотором фиксированном значении x, в то время как каждый из параметров a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ независимо от других принимает все значения из интервала $\overline{a}_i < a_i < \overline{\overline{a}}_i$.

Относительно функции $y=F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n)$ предполагается далее, что она:

А. 1) однозначна и непрерывна в области G относительно всех ее аргументов в их совокупности; 2) обладает в области G интерполяционным свойством.

При этом об однозначной функции $F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n)$ от x и n параметров мы говорим, что она обладает интерполяционным свойством, если всякая система уравнений вида

$$y_i = F(x_i; a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любая система различных между собою значений x отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$, а каждое из y_i — любое значение из области $D(F_{x_i})$ (соответственно), однозначно разрешима относительно $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Каждая функция

$$y=F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{1}$$

удовлетворяющая условиям А, определяет некоторый класс $K(F)$ непрерывных функций переменной x, каждая из которых соответствует определенной системе значений $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$. $K\{F\}$ будем называть интерполяционным классом функций, соответствующим функции (1).

Частным случаем функции (1) является функция вида

$$F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x), \tag{2}$$

* Все выводы, разумеется, будут действительны и в случае любого множества, гомеоморфного отрезку $0 \leqslant x \leqslant 1$.

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — непрерывные функции, определенные на отрезке $[0, 1]$ и образующие на этом отрезке систему Чебышева (по терминологии С. Н. Бернштейна ([1])), т. е. удовлетворяющие условию: определитель

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1)\, \varphi_1(x_2) \ldots \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1)\, \varphi_n(x_2) \ldots \varphi_2(x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x_1)\, \varphi_n(x_2) \ldots \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — различные между собою точки отрезка $[0, 1]$.

Пусть функция $f(x)$ переменной x принадлежит к классу $C\{f\}$ непрерывных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющих (для каждого x) условию

$$f(x) \subset D(F_x).$$

Пусть E — какое-либо замкнутое множество точек отрезка $[0, 1]$, содержащее не менее $n+1$ точек (в частном случае множеством E может быть отрезок $[0, 1]$).

Уклонением функции $F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \subset K\{F\}$ от функции $f(x) \subset C\{f\}$ на множестве E называется

$$\max_E |f(x) - F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)|.$$

Функция $F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется наименее уклоняющейся от функции $f(x)$ на множестве E, если ее уклонение от функции $f(x)$ не больше, чем уклонение любой функции класса $K(F)$ от этой же функции $f\{x\}$, т. е. если

$$\max_E |f(x) - F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)| =$$
$$= \min_{\mathfrak{A}} \max_x |f(x) - F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n)| = \mu(f; E),$$

где под $\mathfrak{A}$ разумеется область $\overline{a_i} < a_i < \overline{\overline{a_i}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Число $\mu(f; E)$ (которое будем обозначать $\mu(f)$ в случае, если E совпадает с отрезком $[0, 1]$) называется наилучшим приближением функции $f(x) \subset C\{f\}$ посредством функций класса $K\{F\}$ на множестве E.

Здесь приводятся некоторые теоремы, касающиеся равномерного приближения функций класса $C\{f\}$ посредством функций какого-либо из классов $K\{F\}$.

Теорема 1. *Для каждой данной функции $f(x) \subset C\{f\}$ и каждого данного множества E_{n+1}, состоящего из $n+1$ различных точек отрезка $[0, 1]$, существует в классе $K(F)$ одна и только одна функция $F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, наименее уклоняющаяся от функции $f(x)$ на множестве E_{n+1}.*

Теорема 2. *Для каждой функции $f(x) \subset C\{f\}$ существует одна и только одна функция $F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \subset K\{F\}$, наименее уклоняющаяся от $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$, причем $\mu(f) = \sup \mu(f; E_{n+1})$ по всем множествам E_{n+1}, состоящим из $n+1$ различных точек отрезка $[0, 1]$.*

Теорема 3. *Для того чтобы функция $F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \subset K\{F\}$ была наименее уклоняющейся от функции $f(x) \subset C(f)$ на отрезке*

$[0, 1]$, *необходимо и достаточно, чтобы абсолютный максимум* $|f(x)-F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)|$ *достигался не менее, чем в* $n+1$ *точках* $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{n+1}$ *этого отрезка, в которых разность* $f(x)-F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *последовательно меняет знак.*

Эти теоремы представляют собой обобщение соответствующих теорем П. Л. Чебышева (теорема 3) и Валле-Пуссена (²) (теоремы 1 и 2), имеющих место в случае равномерного приближения непрерывных функций многочленами.

Задача о равномерном приближении непрерывных функций одной переменной x посредством функций класса, определяемого функцией $F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n)$, зависящей от x и n параметров, впервые была поставлена и рассматривалась еще основоположником теории приближения функций великим русским математиком П. Л. Чебышевым в его мемуаре „Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций" (³). П. Л. Чебышев установил в этом мемуаре необходимое условие, которому должна удовлетворять система значений $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$, чтобы

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)-F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)|$$

был меньше, чем при всякой другой системе значений параметров, достаточно близкой к системе $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, и применил его к задачам приближения функций на конечном отрезке посредством многочленов и рациональных функций.

Однако относительно функции $F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n)$ П. Л. Чебышев предполагал, что она не только непрерывна, но и непрерывно дифференцируема как по переменной x, так и по параметрам $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Кроме того, следует заметить, что в общей постановке он вовсе не касался вопроса о существовании и единственности функции рассматриваемого класса, наименее уклоняющейся от данной непрерывной функции.

Значительно позже Юнг доказал (⁴) существование в классе, определяемом функцией $F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n)$, функции, наименее уклоняющейся от данной непрерывной функции, при следующих предположениях относительно $F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n)$:

1) $F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n)$ однозначно определена и непрерывна по всем ее аргументам (в их совокупности) для каждого x на конечном отрезке $[a, b]$ и для всех вещественных конечных значений параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

2) Для всякого положительного числа M всегда существует число N такое, что если имеет место соотношение

$$|F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n)| \leqslant M$$

для всех значений x отрезка $[a, b]$, то для параметров a_i имеет место соотношение $|a_i| \leqslant N$.

Но единственность функции рассматриваемого класса, наименее уклоняющейся от данной непрерывной функции, и теорему 3 Юнг доказал только для случая, когда функция $F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n)$ имеет вид (2). Вообще же об интерполяционном свойстве функции $F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n)$ Юнг, так же как и П. Л. Чебышев, не делал никаких предположений.

Поступило
16 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, ч. I, 1937. ² Ch. Vallée Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, 1919. ³ П. Л. Чебышев, Соч., 2, изд. АН СССР, 1947. ⁴ J. W. Young, Trans. Am. Math. Soc., 8 (1907).