Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 3

МАТЕМАТИКА

С. Г. МИХЛИН

ОБ УРАВНЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 20 I 1951)

Хорошо известна теорема о среднем для гармонических функций, а также ряд обращений этой теоремы. В. Феллер [1] обобщил теорему о среднем на уравнения вида $\Delta_2 u = 0$, где Δ_2 — второй дифференциальный оператор Бельтрами в некоторой римановой метрике.

В настоящей заметке мы обобщим теорему о среднем на самосопряженные эллиптические уравнения вида*

$$Lu = -\sum_{i,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + B(x)\,u = f(x) \tag{1}$$

в предположении, что $B(x)$ один раз, а $A_{ik}(x)$ трижды непрерывно дифференцируемы в некоторой конечной области Ω m-мерного евклидова пространства, и затем дадим некоторое обращение теоремы о среднем. Используя эти результаты, мы покажем, что решения однородного уравнения

$$Lu = -\sum_{i,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + B(x)\,u = 0, \tag{2}$$

дважды непрерывно дифференцируемые внутри Ω, образуют подпространство в $L_2(\Omega)$. В заключение мы докажем, что решение вариационной задачи, к которой сводится интегрирование уравнения (1) при тех или иных краевых условиях, удовлетворяет почти везде уравнению (1), если только $f(x) \in L_2(\Omega)$.

Уравнение (2) имеет фундаментальное решение** $\Gamma(x, y)$, главная часть которого равна

$$\left\{\sum_{i,\,k=1}^{m} C_{ik}(x)(x_i - y_i)(x_k - y_k)\right\}^{-\frac{m-2}{2}}; \tag{3}$$

через C_{ik} обозначены элементы матрицы, обратной матрице коэффициентов A_{ik}. Если расстояние r между точками x и y достаточно мало, то $\Gamma(x, y) > 0$. Мы будем считать, что это неравенство выполнено.

Положим

$$\gamma(x, y) = \{\Gamma(x, y)\}^{-\frac{1}{m-2}}. \tag{4}$$

---

* x — точка с декартовыми координатами $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

** О его построении см. [2], а также [3], § 6 главы IV.

Пусть γ_0 означает достаточно малую постоянную. Если u есть дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая уравнению (2), то справедлива формула, выражающая для этого уравнения теорему о среднем значении

$$u(x) = -\frac{1}{E(x)}\left\{\int\limits_{\gamma=\gamma_0} u(y)\,N(\Gamma)\,dS_y - \Gamma_0 \int\limits_{\gamma<\gamma_0} B(y)\,u(y)\,d\Omega_y\right\}. \tag{5}$$

Здесь

$$N(\Gamma) = -\sum_{i,\,k=1}^{m} A_{ik}(y)\,\frac{\partial\Gamma}{\partial y_k}\cos(\nu,\,y_i);$$

ν — внешняя нормаль к поверхности $\gamma=\gamma_0$. Далее, $\Gamma_0=\gamma_0^{-m+2}$, и

$$E(x) = (m-2)\int\limits_{S_1}\left\{\sum_{i,\,k=1}^{m} C_{ik}(x)\cos(r,\,x_i)\cos(r,\,x_k)\right\}^{-m/2} \times$$

$$\times \sum_{i,\,k,\,l=1}^{m} A_{ik}(x)\,C_{il}(x)\cos(r,\,x_k)\cos(r,\,x_l)\,dS_1; \tag{6}$$

S_1 — гиперсфера с центром x и радиусом единица.

Формула среднего значения для уравнения (1) имеет вид

$$u(x) = -\frac{1}{E(x)}\left\{\int\limits_{\gamma=\gamma_0} u(y)\,N(\Gamma)\,dS_y - \Gamma_0\int\limits_{\gamma<\gamma_0} B(y)\,u(y)\,d\Omega_y - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\gamma<\gamma_0} (\Gamma-\Gamma_0)\,f(y)\,d\Omega_y\right\}. \tag{7}$$

Пусть $F(\gamma_0)$ означает бесконечно дифференцируемую функцию от γ_0, имеющую нуль достаточно высокого порядка при $\gamma_0=0$ и тождественно равную нулю при $\gamma_0 \geqslant \gamma_1$, где γ_1 — достаточно малое число. Умножая (5) на $F(\gamma_0)\left.\dfrac{d\gamma}{\partial\gamma/\partial\nu}\right|_{\gamma=\gamma_0}$, интегрируя по γ_0 в пределах $0\leqslant\gamma_0\leqslant\gamma_1$ и деля на коэффициент при $u(x)$ в левой части полученного равенства, мы придем к формуле вида

$$(x) = \int\limits_{\gamma<\gamma_1} u(y)\,K(x,\,y)\,d\Omega_y, \tag{8}$$

где $K(x,\,y)$ — дважды непрерывно дифференцируема по $x_1, x_2, \ldots, x_m$ при любом положении точки y в пространстве и $K(x,\,y)\equiv 0$ при $\gamma\geqslant\gamma_1$.

Теорема 1. *Множество решений уравнения* (2), *дважды непрерывно дифференцируемых внутри* Ω *и квадратично суммируемых в* Ω, *образует подпространство в* $L_2(\Omega)$.

Пусть $\{u_n\}$ — сходящаяся в $L_2(\Omega)$ последовательность решений уравнения (2), удовлетворяющих условиям теоремы. Обозначим $u_0=\lim u_n$. Возьмем произвольную замкнутую подобласть $\overline{\Omega}'$ и выберем $\overline{\gamma}$ столь малым, чтобы область $\gamma(x,y)\leqslant\overline{\gamma}$ лежала внутри Ω каждый раз, когда $x\in\overline{\Omega}'$. Если $\gamma_1\leqslant\overline{\gamma}$, то для любой точки $x\in\overline{\Omega}$ и для любого члена последовательности $\{u_n\}$ верна формула (8); полагая $n\to\infty$, мы найдем, что эта формула верна и для u_0. Отсюда следует, что u_0 дважды непрерывно дифференцируема внутри Ω. Из той же формулы (8) нетрудно усмотреть, что $u_n(x)\to u_0(x)$ равномерно в любой замкнутой подобласти Ω.

Будучи решениями уравнения (2), функции $u_n(x)$ удовлетворяют соотношению (5). Полагая $n \to \infty$, мы получим

$$u_0(x) = -\frac{1}{E(x)}\left\{\int\limits_{\gamma=\gamma_0} u_0(y)\,N(\Gamma)\,dS_y - \Gamma_0 \int\limits_{\gamma<\gamma_0} B(y)\,u_0(y)\,d\Omega_y\right\}. \qquad (9)$$

С другой стороны, полагая $Lu_0 = f_0(x)$, имеем по формуле (7):

$$u_0(x) = -\frac{1}{E(x)}\left\{\int\limits_{\gamma=\gamma_0} u_0(y)\,N(\Gamma)\,dS_y - \Gamma_0 \int\limits_{\gamma<\gamma_0} B(y)\,u_0(y)\,d\Omega_y - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{\gamma<\gamma_0} (\Gamma - \Gamma_0)\,f_0(y)\,d\Omega_y\right\}. \qquad (10)$$

Из (9) и (10) следует:

$$\int\limits_{\gamma<\gamma_0} (\Gamma - \Gamma_0)\,f_0(y)\,d\Omega_y = 0.$$

Применив к последнему интегралу теорему о среднем значении и положив $\gamma_0 \to 0$, мы найдем, что $Lu_0 = 0$.

Теорема 2. *Формула (7) при $f(y) = Lu$ верна для функций, которые имеют все обобщенные производные второго порядка, квадратично суммируемые в любой внутренней подобласти Ω.*

Из теорем о „вложении пространств“ С. Л. Соболева ([4]) вытекает, что такие функции квадратично суммируемы как по области $\gamma < \gamma_0$, так и по поверхности $\gamma = \gamma_0$, и правая часть формулы (7) имеет смысл. Чтобы доказать справедливость этой формулы, напишем ее для средней функции ([4]) $u_h(x)$; радиус усреднения h сделаем меньшим, чем расстояние от поверхности $\gamma = \gamma_0$ до границы области Ω. Перейдя к пределу при $h \to 0$, мы получим формулу (7) для функции $u(x)$.

Теорема 3. *Пусть $f(x) \in L_2(\Omega)$ и $u(x) \in L_2^{(1)}(\Omega)$*. Если $u(x)$ удовлетворяет соотношению (7), то эта функция имеет в любой внутренней подобласти Ω квадратично суммируемые обобщенные вторые производные и почти везде в Ω удовлетворяет уравнению* (1).

Положим

$$v(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{f(y)}{E(y)}\,\Gamma(x, y)\,d\Omega_y. \qquad (11)$$

Имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x_l} = \int\limits_{\Omega} \frac{f(y)}{E(y)}\,\frac{\partial \Gamma}{\partial x_l}\,d\Omega_y. \qquad (12)$$

Дифференцируя далее**, получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_l \partial x_k} = \int\limits_{\Omega} \frac{f(y)}{E(y)}\,\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_l\,\partial x_k}\,d\Omega_y + \frac{f(x)}{E(x)} \int\limits_{S_1} \left\{\sum_{q,\,s=1}^{m} C_{qs}(x)\cos(r, x_q)\cos(r, x_s)\right\}^{-m/2} \times$$
$$\times \sum_{l=1}^{m} C_{il}(x)\cos(r, x_l)\cos(r, x_k)\,dS_1. \qquad (13)$$

Объемный интеграл в (13) — сингулярный, т. е. должен быть понимаем в смысле его главного значения.

---

* Через $L_2^{(n)}(\Omega)$ мы обозначаем множество функций, которые вместе со своими производными до порядка n включительно квадратично суммируемы в Ω.

** О дифференцировании интегралов типа (12) см. ([5]), § 14.

Формулы (12) и (13) дают, вообще говоря, не обычные, а обобщенные производные от v; из нашей теоремы об ограниченности оператора сингулярного интегрирования * вытекает, что вторые производные от v квадратично суммируемы в Ω.

Из (13) следует, что

$$Lv = \int_\Omega \frac{f(y)}{E(y)} L\Gamma \, d\Omega_y + f(x) = f(x). \tag{14}$$

Применив к $v(x)$ формулу (7), мы найдем, что разность $u(x) - v(x)$ удовлетворяет соотношению (5). Повторив рассуждения теоремы 1, мы убедимся, что эта разность дважды непрерывно дифференцируема внутри Ω и удовлетворяет уравнению (2).

Рассмотрим теперь задачу об интегрировании уравнения (1) при некотором однородном самосопряженном краевом условии; мы примем, что на множестве функций, удовлетворяющих этому условию, оператор Lu положительно-определенный, т. е. что в метрике пространства $L_2(\Omega)$

$$(Lu, u) \geqslant C \| u \|^2, \quad C = \text{const} > 0.$$

Как известно, поставленная нами задача может быть сведена к задаче о минимуме функционала

$$(Lu, u) - (u, f) - (f, u) \tag{15}$$

на замыкании упомянутого множества в метрике со скалярным произведением

$$[u, v] = (Lu, v) = (u, Lv).$$

Решение этой задачи существует и единственно **; оно принадлежит пространству $L_2^{(1)}(\Omega)$.

Теорема 4. *Функция, реализующая минимум функционала* (15), *имеет в любой внутренней подобласти Ω квадратично суммируемые обобщенные производные и удовлетворяет почти везде в Ω уравнению* (1).

Указанную функцию можно получить как предел минимизирующей последовательности, построенной по методу наименьших квадратов ([7]). При этом мы будем иметь в метрике $L_2(\Omega)$ (см. ([7]), § 60)

$$\| u - u_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \| f - Lu_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

На основании упомянутых выше теорем о „вложении пространств", $u_n \to u$ в среднем по любой гладкой поверхности, лежащей внутри Ω.

Напишем формулу (7) для функции $u_n(x)$. При $n \to \infty$ она перейдет в ту же формулу (7) для $u(x)$; теперь наша теорема непосредственно вытекает из теоремы 3.

Поступило
29 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Феллер, Усп. матем. наук, в. 8 (1940). [2] Е. Е. Леви, там же, в. 8 (1940). [3] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, 1945. [4] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950. [5] С. Г. Михлин, Усп. матем. наук, 3, в. 3/28 (1948). [6] С. Г. Михлин, ДАН, 19, № 5 (1938). [7] С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, 1950.

* См. ([6]), а также ([5]), § 21.

** Подробно об этом см., например ([7]), § 19.