Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 3

МАТЕМАТИКА

М. И. ВИШИК

ОБ ОБЩЕМ ВИДЕ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 27 I 1951)

1. В конечной области D с гладкой границей Γ рассматривается дифференциальный оператор

$$Lf \equiv \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} f \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f + c(x) f, \tag{1}$$

где $a_{ik}(x)$, трижды, $b_i(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы в $D+\Gamma$, а $c(x)$ непрерывно дифференцируема в $D+\Gamma$, причем $c(x) \leqslant 0$. Через Mg обозначается сопряженный к Lf дифференциальный оператор.

Введем следующие обозначения: $\mathfrak{L}_2(D)$ — гильбертово пространство функций, суммируемых в квадрате по области D; $[f, g]$ — скалярное произведение в $\mathfrak{L}_2(D)$; Ω_A — область определения оператора A; R_A — область изменения оператора A.

Дифференциальный оператор L, рассматриваемый только на многообразии $\Omega_{L'_0}$ функций $f'_0(x)$, обращающихся в нуль в некоторой граничной полоске области D, обозначим через L'_0: $L'_0 f'_0 = L f'_0$. Пусть L_0 — замыкание оператора L'_0 в $\mathfrak{L}_2(D)$. Аналогично для сопряженного дифференциального оператора M определяются операторы M'_0 и M_0. Сопряженный к M_0 оператор обозначим через L^*, а сопряженный к L_0 — через M^*: $(M_0)^* = L^*$, $(L_0)^* = M^*$. Очевидно, $L_0 \subset L^*$, $M_0 \subset M^*$. Ω_{L_0} мы называем минимальной областью определения оператора L (грубо говоря, она состоит из всех функций, обращающихся вместе с первыми производными в нуль на границе Γ области D). Ω_{L^*} — максимальная область определения оператора L (она состоит из всех функций из $\mathfrak{L}_2(D)$, к которым применим оператор L).

Через $\widetilde{L}$ обозначим расширение оператора L_0, являющееся частью L^*, $L_0 \subset \widetilde{L} \subset L^*$, и соответствующее нулевым краевым условиям: $f|_\Gamma = 0$, т. е $\Omega_{\widetilde{L}}$ состоит из всех функций $f(x) \in \Omega_{L^*}$, которые в среднем (в смысле С. Л. Соболева ([1])) обращаются в нуль на Γ. Доказывается, что $\widetilde{L}$ имеет вполне непрерывный обратный $\widetilde{L}^{-1}$, заданный на всем $\mathfrak{L}_2(D)$ (т. е., в частности, первая краевая задача для уравнения $Lf = h$ при любом $h(x) \in \mathfrak{L}_2(D)$ однозначно разрешима).

Расширение $\overline{L}$ оператора L_0, $L_0 \subset \overline{L} \subset L^*$, мы называем: а) вполне разрешимым; б) регулярно разрешимым; в) нормально разрешимым, если, соответственно: а) оператор $\overline{L}$ имеет вполне непрерывный обратный $\overline{L}^{-1}$, заданный на всем $\mathfrak{L}_2(D)$; б) для уравнений $\overline{L}f = h$ и $\overline{L}^* g = h'$, где $\overline{L}^*$ — оператор, сопряженный к $\overline{L}$, справедливы теоремы, аналогичные трем теоремам Фредгольма; в) необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения $\overline{L}f = h$ является ортогональность правой части h ко всем решениям однородного сопряженного уравнения $\overline{L}^* g = 0$.

Теорема 1. *Область определения $\Omega_{\overline{L}}$ любого* а) *вполне разрешимого,* б) *регулярно разрешимого,* в) *нормально разрешимого расширения $\overline{L}$ оператора L_0, $L_0 \subset \overline{L} \subset L^*$, допускает разложение в следующую линейную прямую сумму:*

$$\Omega_{\overline{L}} = \Omega_{L_0} \dot{+} (\widetilde{L}^{-1} + C)\overline{V} \dot{+} \overline{U}^{\perp}, \tag{2}$$

где $\widetilde{L}$ — расширение, соответствующее нулевым краевым условиям, причем в случае а) *$\overline{U}^{\perp} = 0$, $\overline{V} = V$, где V — пространство всех решений v однородного уравнения $M^* v = 0$, C — вполне непрерывный оператор, у которого $\Omega_C = V$, а R_C является частью пространства U всех решений u однородного уравнения $L^* u = 0$; в случае* б) *подпространства $\overline{U}^{\perp} \subset U$ и $\overline{V} \subset V$ замкнуты, размерности подпространств $\overline{U}^{\perp}$ и $\overline{V}^{\perp} = V \ominus \overline{V}$ конечны и одинаковы, $\Omega_C = \overline{V}$, $R_C \subset U$, причем оператор C — непрерывный; в случае* в) *подпространства $\overline{V} \subset V$, $\overline{U}^{\perp} \subset U$ замкнуты, оператор C — непрерывный.*

2. Сопоставим сейчас каждому из описанных выше расширений $\overline{L}$ некоторое, соответствующее ему, краевое условие. Для этого введем два основных граничных оператора.

Граничный оператор γ_1 сопоставляет любой функции $f(x) \in \Omega_{L^*}$, грубо говоря, ее значение на границе: $\gamma_1 f = f|_\Gamma$. Через H_1 обозначим пространство всех элементов вида $\gamma_1 f$, в котором скалярное произведение задается формулой $(\gamma_1 f, \gamma_1 f)_1 = [u(x), u(x)]$, где $u(x)$ — решение первой краевой задачи для уравнения $Lu = 0$ при краевом условии $u|_\Gamma = \gamma_1 f = f(S)$, где $S \in \Gamma$. Доказывается, что для непрерывных функций на границе $f(S) = \gamma_1 f$:

$$(\gamma_1 f, \gamma_1 f)_1 = \int\limits_\Gamma \int\limits_\Gamma K(S, S') f(S) f(S') \, dS \, dS', \tag{3}$$

где $K(S, S')$ — ядро с особенностью вида $r^{-n+2}(S, S')$ для $n > 2$ и $\ln \frac{1}{r(S, S')}$ — для $n = 2$. Непрерывные функции $f(S) = \gamma_1 f$ образуют всюду плотное множество в H_1. Само пространство H_1 получается процессом замыкания по метрике (3) (ср. ([2,3])). Доказывается, что *в пространство H_1 вложимо любое пространство $\mathfrak{L}_p(\Gamma)$ всех функций, суммируемых по Γ со степенью p, где $p < \frac{2n}{n-1}$*.

Граничный оператор γ_2 сопоставляет любой гладкой функции $f(x) \in \Omega_{L^*}$ следующую функцию, заданную на границе области:

$$\gamma_2 f = \frac{\partial f}{\partial \nu}\Big|_\Gamma - Pf|_\Gamma, \tag{4}$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum\limits_{i, k=1}^{n} a_{ik}(S) \frac{\partial}{\partial x_i} \cos(n, x_k)$, n — внешняя нормаль, а значение оператора P определяется так: $Pf\Big|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma$, где $u(x)$ — решение первой краевой задачи для уравнения $Lu = 0$ при краевом условии $u|_\Gamma = f|_\Gamma$. Указанные выше функции $\gamma_2 f$ образуют всюду плотное множество в некотором пространстве H_2, в котором скалярное произведение вводится аналогично тому, как это сделано в моей заметке ([3]). Когда $f(x)$ пробегает Ω_{L^*}, функции $\gamma_2 f$ заполняют все H_2. Доказывается, что *пространство* H_2 *вложимо в любое из пространств* $L_{q^*}(\Gamma)$, *где* $q^* < \frac{2(n-1)}{n-2}$.

Теорема 2. *Область определения* $\Omega_{\overline{L}}$ *любого* а) *вполне разрешимого,* б) *регулярно разрешимого,* в) *нормально разрешимого расширения* $\overline{L}$ *состоит из тех и только тех функций* $f(x) \in \Omega_{L^*}$, *которые на границе* Γ *удовлетворяют граничному условию вида*

$$\gamma_1 f = \overline{C}\gamma_2 f + \overline{u}_1^{\perp}, \tag{5}$$

причем в случае а) $\overline{u}_1^{\perp} = 0$, $\overline{C}$ — *вполне непрерывный оператор, отображающий пространство* H_2 *в* H_1; *в случае* б) $\overline{u}_1^{\perp}$ — *любой элемент конечномерного подпространства* $\overline{U}_1^{\perp} \subset H_1$, $\overline{C}$ — *непрерывный оператор, у которого* $\Omega_{\overline{C}}$ — *замкнутое подпространство в* H_2, *ортогональное дополнение которого в* H_2: $H_2 \ominus \Omega_{\overline{C}}$ *(в метрике* H_2*) имеет такую же размерность, как* $\overline{U}_1^{\perp}$, *а* $R_{\overline{C}} \subset H_1$; *в случае* в) *подпространства* $\overline{U}_1^{\perp} \subset H_1$ *и* $\Omega_{\overline{C}} \subset H_2$ *замкнуты, оператор* $\overline{C}$ — *непрерывный.*

О краевом условии вида (5) мы говорим, что оно имеет канонический вид и соответствует расширению $\overline{L}$, область определения которого $\Omega_{\overline{L}}$ состоит из всех функций $f(x) \in \Omega_{L^*}$, удовлетворяющих этому краевому условию.

Таким образом, теорема 2 дает общий вид краевого условия (в каноническом виде), при котором соответствующая краевая задача для уравнения $Lf = h$ в области D в случае а) разрешима для любой правой части $h \in \mathfrak{L}_2(D)$, а соответствующий оператор имеет вполне непрерывный обратный; в случае б) для этой задачи и для сопряженной краевой задачи для уравнения $Mg = h'$ имеют место три теоремы, аналогичные трем теоремам Фредгольма, а в случае в) для этих задач выполнена лишь теорема, аналогичная третьей теореме Фредгольма.

3. Если краевое условие дано не в каноническом виде, а, например, в виде соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma} = Qf\Big|_{\Gamma}, \tag{6}$$

то для решения вопроса о том, какими свойствами обладает соответствующая краевая задача для уравнения $Lf = h$ в области D, мы приводим краевое условие (6) к каноническому виду. Для этого мы вычитаем из обеих частей (6) выражение $Pf|_{\Gamma}$, в результате чего получается эквивалентное краевое условие вида $\gamma_2 f = (Q - P) f|_{\Gamma}$. Исходя из теоремы 2 и указанных выше теорем вложения H_2 в $\mathfrak{L}_{q^*}(\Gamma)$ и $\mathfrak{L}_p(\Gamma)$ в H_1, мы доказываем, что, если оператор $Q - P$, рассматриваемый, например, в $\mathfrak{L}_2(\Gamma)$, а) имеет вполне непрерывный обратный, или б) является регулярно разрешимым, или в) является нормально разрешимым, то краевое условие (6) соответствует: а) вполне разрешимому, б) регулярно разрешимому, в) нормально разрешимому расширению $\overline{L}$ оператора L_0, $L_0 \subset \overline{L} \subset L^*$.

Последние предложения находят применение при рассмотрении краевых задач, в краевые условия которых входят дифференциальные (и ограниченные) операторы на Γ.

Поступило
25 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Матем. сборн., 2 (44), 467 (1937). [2] М. И. Вишик, ДАН, 65, № 4 (1949). [3] М. И. Вишик, ДАН, 65, № 6 (1949).