Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 2

ГЕОХИМИЯ

Член-корреспондент АН СССР Д. С. КОРЖИНСКИЙ

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ИНФИЛЬТРАЦИОННОЙ МЕТАСОМАТИЧЕСКОЙ ЗОНАЛЬНОСТИ

Пусть раствор просачивается через поры горной породы однородного исходного состава, вызывая ее метасоматическое замещение. Вызывая замещение породы, раствор при взаимодействии с породой изменяет свой состав, и при дальнейшем просачивании в глубь породы характер вызываемого им метасоматоза должен изменяться. Это приводит к образованию разрастающейся колонки инфильтрационных метасоматических зон.

Для математического исследования строения этой колонки мы сделаем следующие допущения, соответствующие, как было показано ранее [1], предельному случаю, к которому приближаются природные инфильтрационные метасоматические процессы. 1) Система пор, по которой просачивается раствор, весьма равномерна и тонка, так что проточным раствором омывается каждое зерно горной породы. 2) Объем пор незначителен сравнительно с объемом горной породы, и поэтому количества вещества, находящегося в каждый данный момент в существенно водном поровом растворе, незначительно сравнительно с массой горной породы, подвергающейся замещению. 3) В каждом элементарном участке порода и ее поровый раствор находятся в химическом равновесии, т. е. их составы изменяются одновременно.

Мы полагаем далее, что метасоматоз идет без изменения объема породы, как это обычно свойственно природному метасоматозу, и кроме объема постоянны также температура и давление раствора. В этих условиях в каждом элементарном участке равновесное состояние системы порода — раствор полностью определяется k параметрами, где k — число компонентов, не считая воды [1]. В качестве параметров мы возьмем содержания компонентов в единице объема породы $(a, b, \ldots, k)$ и их концентрации в растворе $(C_a, C_b, \ldots, C_k)$.

Рассмотрим произвольное сечение метасоматической колонки, перпендикулярное потоку просачивающихся растворов, с площадью сечения, равной единице. Элементарная масса m_i компонента i, просочившаяся с раствором через это сечение, равна произведению объема просочившегося раствора dv на концентрацию C_i в нем компонента i и на коэффициент фильтрационного эффекта φ_i данного компонента в данной среде [2]:

$$dm_i = \varphi_i C_i dv, \quad \text{или} \quad \frac{dm_i}{dv} = \varphi_i C_i. \tag{1}$$

Возьмем частные производные обеих частей этого уравнения по расстоянию x. Производная $\frac{\partial (dm_i / dv)}{\partial x} = -\frac{\partial i}{\partial v}$ представляет разность между массами компонента i, просочившимися через два сечения колонки, удаленных на единицу расстояния, т. е. представляет убыль массы данного компонента в единице объема породы. Отсюда, при условии независимости φ_i от расстояния (пористость равномерна), получаем:

$$-\frac{\partial i}{\partial v}=\varphi_i\frac{\partial C_i}{\partial x}. \tag{2}$$

Такое уравнение действительно для любого компонента, так что всего получаем систему из k уравнений.

В силу наличия в каждом элементарном участке термодинамического равновесия, из $2k$ параметров $a, b, \ldots, k$, $C_a, C_b, \ldots, C_k$ независимую величину могут иметь только k параметров. Отсюда следует существование k уравнений связи между $2k$ параметрами, что может быть представлено следующей системой из k уравнений:

$$C_a=f_{a\,(a,b,\ldots,k)},\quad C_b=f_{b\,(a,b,\ldots,k)},\ldots,C_k=f_{k\,(a,b,\ldots,k)} \tag{3}$$

Всего для метасоматической колонки мы имеем $2k$ уравнений (2) и (3), содержащих $2k+2$ переменных ($a, b, \ldots, k$, $C_a, C_b, \ldots, C_k$, x, v). Коэффициенты фильтрационного эффекта $\varphi_a, \ldots, \varphi_k$ мы считаем известными постоянными. При интегрировании k уравнений (2) по x и по v получится $2k$ произвольных постоянных интегрирования, для определения которых необходимо задать $2k$ начальных условий. Это может быть выполнено заданием исходного состава замещаемой породы ($a=a^0$, $b=b^0,\ldots$, $k=k^0$ при $v=0$, $x>0$) и исходного состава воздействующего раствора ($C_a=C_a^0$, $C_b=C_b^0,\ldots,C_k=C_k^0$ при $x=0$, $v>0$). В таком случае число независимых переменных, равное числу $2k+2$ всех переменных за вычетом числа $2k$ связывающих их уравнений, равно двум. Мы примем за независимые переменные расстояние x вдоль колонки от исходного сечения, т. е. от первоначального места вступления раствора в данную породу, и объем v раствора, просочившегося через одно из сечений. Отсюда видно, что *при данной исходной породе и данном исходном воздействующем растворе образуется вполне определенная метасоматическая колонка, каждому сечению которой, при данном объеме просочившегося раствора, соответствует определенный состав и породы и раствора.*

В силу наличия только двух переменных имеем тождественно:

$$di\equiv\frac{\partial i}{\partial x}dx+\frac{\partial i}{\partial v}dv.$$

Подставив $\partial i/\partial v$ из уравнения (2) и приняв $di=0$, получим отсюда:

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)_i=\varphi_i\frac{\partial C_i}{\partial x}:\frac{\partial i}{\partial x}. \tag{4}$$

Здесь $(dx/dv)_i$ представляет относительную скорость продвижения сечения, выделяемого по постоянному содержанию i данного компонента в единице объема породы.

Аналогично, выразим полный дифференциал C_i через дифференциалы x и v:

$$dC_i\equiv\frac{\partial C_i}{\partial x}dx+\frac{\partial C_i}{\partial v}dv.$$

Использовав опять уравнение (2) и приравняв $dC_i=0$, получим

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)_{C_i}=\varphi_i\frac{\partial C_i}{\partial v}:\frac{\partial i}{\partial v}, \tag{5}$$

что дает относительную скорость перемещения сечения, выделяемого по постоянной концентрации данного компонента в поровом растворе.

Так как в метасоматической колонке только два параметра независимы, то при задании постоянного содержания i или постоянной концентрации C_i у нас остается только одна независимая переменная, и для таких сечений мы можем рассматривать x как функцию от v. Поэтому:

$$\left(\frac{}{dv}\right)_i = \varphi_i \frac{\partial C_i}{\partial x} : \frac{\partial i}{\partial x} = \varphi_i \left(\frac{\partial C_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}\right) : \left(\frac{\partial i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \varphi_i \frac{\partial C_i}{\partial v} : \frac{\partial i}{\partial v} = \left(\frac{dx}{dv}\right)_{C_i}, \tag{6}$$

т. е. при продвижении, по мере просачивания раствора, какого-либо сечения, выделяемого по постоянному содержанию компонента i, в нем сохраняется также и постоянная концентрация данного компонента в поровом растворе.

Далее будем рассматривать два бесконечно близких сечения метасоматической колонки, сохраняющих при перемещении постоянные содержания компонента i, именно i' в одном и $i' + di'$ в другом сечении, а также постоянные концентрации C'_i и $C'_i + dC'_i$. По мере просачивания раствора и перемещения рассматриваемых сечений расстояние dx между ними будет возрастать, тогда как разности содержаний di' и концентраций dC'_i между этими двумя сечениями будут сохранять постоянную величину. Но в таком случае постоянной будет и скорость перемещения этих сечений по мере просачивания раствора, так как, согласно (6)

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)_{i', C'_i} = \varphi_i \frac{\partial C'_i}{\partial x} : \frac{\partial i'}{\partial x} = \varphi_i \frac{dC'_i}{di'} = \text{const}, \tag{7}$$

т. е. при постоянных разностях dC'_i и di' для двух бесконечно близких сечений скорость их перемещения не может зависеть от v, она постоянна. В силу постоянства $(dx / dv)_i$ легко интегрировать (4), причем, вследствие начального условия $x_i = 0$ при $v = 0$, постоянная интегрирования, как равная нулю, выпадает:

$$x_i = \varphi_i \left(\frac{\partial C}{\partial x} : \frac{\partial i}{\partial x}\right) v \qquad \text{или} \quad \frac{x_i}{v} = \varphi_i \frac{\partial C_i}{\partial x} : \frac{\partial i}{\partial x} = \left(\frac{dx}{dv}\right)_i. \tag{8}$$

Аналогичное уравнение выводится для каждого компонента породы и раствора.

Если теперь мы возьмем произвольное сечение $x = x'$ в колонке, образовавшейся в результате просачивания определенного объема раствора $v = v'$ через однородную исходную породу, то в этом сечении для каждого из компонентов, на основании (8), будем иметь равенства:

$$\frac{x'}{v'} = \left(\frac{dx}{dv}\right)_a = \left(\frac{dx}{dv}\right)_b = \cdots = \left(\frac{dx}{dv}\right), \tag{9}$$

т. е. для любого сечения:

$$\frac{x}{v} = \frac{dx}{dv} = \varphi_a \frac{\partial C_a}{\partial x} : \frac{\partial a}{\partial x} = \varphi_b \frac{\partial C_b}{\partial x} : \frac{\partial b}{\partial x} = \cdots = \varphi_k \frac{\partial C_k}{\partial x} : \frac{\partial k}{\partial x}. \tag{10}$$

Таким образом, *при инфильтрационном метасоматозе каждое сечение метасоматической колонки по мере просачивания раствора перемещается с постоянной скоростью, сохраняя постоянными состав породы и состав порового раствора.* Поэтому в формуле (10) мы выпустили часть индексов, подразумевая под dx / dv относительную скорость перемещения сечения, сохраняющего постоянные содержания и концентрации каждого из компонентов. *По мере просачивания раствора инфильтрационная метасоматическая колонка испытывает только равномерное разрастание, без качественного изменения своих зон.*

Если взять колонку при постоянном $v = v'$, то x будет единственным независимым переменным, и система уравнений (10) может быть представлена так:

$$\frac{x}{v'} = \varphi_a \frac{dC_a}{da} = \varphi_b \frac{dC_b}{db} = \cdots = \varphi_k \frac{dC}{dk} \qquad (11)$$

В контактах двух зон качественно различного минералогического состава имеет место прерывное изменение концентраций и содержаний компонентов, т. е. бесконечно малые разности переходят в конечные, так что вместо (11) получаем:

$$\frac{x}{v'} = \varphi_a \frac{\Delta C_a}{\Delta a} = \varphi \ \frac{\Delta C_b}{\Delta b} = \cdots = \varphi_k \frac{\Delta C_k}{\Delta k} \qquad (12)$$

Это уравнение можно вывести и без помощи дифференциалов, если только принять как очевидное, что состав зон по мере их перемещения не изменяется ([3]). Но для обоснования неизменности состава зон и постоянства скорости их перемещения пришлось итти более общим путем.

Исследованием систем уравнений (3) и (10) могут быть получены различные свойства инфильтрационной метасоматической зональности. Это представляет для геохимии значительный интерес, так как не только при метаморфизме и оруденении горных пород, но и при образовании многих рудных жил основное значение имеет замещение под воздействием длительно просачивающихся растворов, т. е. инфильтрационный метасоматоз. Физико-химическая сторона этих сложных природных процессов без математического исследования безусловно не может быть понята.

Институт геологических наук
Академии наук СССР

Поступило
6 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. С. Коржинский, Изв. АН СССР, сер. геол., № 3 (1950). [2] Д. С. Коржинский, там же, № 2 (1947). [3] Д. С. Коржинский, International Geological Congress, Report of the 18-th Session, Great Britain, 1948, Part III, 1950, p. 76.