

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

В. В. СОЛОДОВНИКОВ

О ДИНАМИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ И ОПТИМАЛЬНЫХ
ХАРАКТЕРИСТИКАХ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ И ПРЕОБРАЗУЮЩИХ
УСТРОЙСТВ

(Представлено академиком В. С. Кулебакиным 24 XII 1950)

Рассмотрим устойчивую линейную динамическую систему, находящуюся под влиянием двух воздействий $y(t)$ и $q(t)$. Пусть

$$y(t) = g(t) + m(t), \quad q(t) = f(t) + n(t), \quad (1)$$

где $g(t)$ и $f(t)$ — заданные функции времени, равные нулю при $t < 0$, а $m(t)$ и $n(t)$ — стационарные случайные функции с равными нулю средними значениями, имеющие спектральные плотности $S_m(\omega)$, $S_n(\omega)$, $S_{mn}(\omega)$.

Предположим, что к системе предъявляется требование, чтобы одна из ее обобщенных координат $x(t)$ возможно точнее воспроизводила функцию $h(t)$

$$h(t) = N(p) y(t) = N(p) [g(t) + m(t)], \quad (2)$$

где $N(p)$ — оператор от p ($p \equiv d/dt$), называемый далее преобразующим.

На практике, например, существенный интерес представляют случаи, когда

$$N(p) = n_0 \quad (\text{сложение}), \quad (3)$$

$$N(p) = n_0 e^{t_0 p} \quad (\text{упреждение}), \quad (4)$$

$$N(p) = n_1 p \quad (\text{дифференцирование}) \quad (5)$$

$$N(p) = n_0 + n_1 p + n_2 p^2 \quad (6)$$

и т. д.

В общем случае ошибка $\varepsilon(t)$ воспроизведения системой функции $h(t)$ равна

$$\varepsilon(t) = h(t) - \int_0^\infty y(t - \tau) k(\tau) d\tau - \int_0^\infty g(t - \tau) l(\tau) d\tau, \quad (7)$$

где $k(t)$ и $l(t)$ — импульсные переходные функции системы, соответствующие точкам приложения воздействий $y(t)$ и $q(t)$.

Вместо (7) можно написать

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t),$$

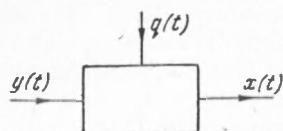


Рис. 1

где

$$\varepsilon_1(t) = N(p) g(t) - \int_0^{\infty} g(t-\tau) k(\tau) d\tau - \int_0^{\infty} f(t-\tau) l(\tau) d\tau, \quad (8)$$

$$\varepsilon_2(t) = N(p) m(t) - \int_0^{\infty} m(t-\tau) k(\tau) d\tau - \int_0^{\infty} n(t-\tau) l(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Условимся характеризовать динамическую точность системы величиной $\mu = \varepsilon_m + \sigma$, где через ε_m обозначено максимальное абсолютное значение функции $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_m = \max |\varepsilon_1(t)|$, для интересующего нас

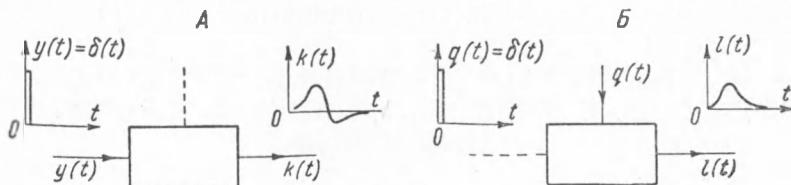


Рис. 2

промежутка времени, а через σ — стандартная или средне-квадратичная ошибка $\sigma = \sqrt{\bar{\varepsilon}_2^2}$, где $\bar{\varepsilon}_2^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varepsilon_2^2(t) dt$. Величину μ назовем суммарной динамической ошибкой *.

Введение в рассмотрение величины μ позволяет обобщить предложенное ранее ⁽¹⁾ понятие качества, обычно применяемое теперь для характеристики динамических свойств систем регулирования при заданных воздействиях. В рассматриваемом нами более общем случае качество систем регулирования можно характеризовать: суммарной динамической ошибкой, характеризующей поведение системы под влиянием как заданных, так и стационарных случайных воздействий, и обычными показателями качества (статической ошибкой, временем переходного процесса, числом колебаний ^(1, 2)), характеризующими поведение системы в переходном процессе, налагающимся на стационарный случайный процесс в момент приложения воздействий в виде заданных функций времени.

Определение обоих слагаемых ε_m и σ , входящих в выражение для μ , можно произвести известными методами ^(3, 4), зная частотные характеристики системы.

Назовем оптимальными характеристиками системы импульсные переходные функции $k(t)$, $l(t)$ или соответствующие им передаточные функции $\Phi(j\omega)$, $\Phi_l(j\omega)$. Часто ⁽³⁾ вместо двух функций $k(t)$ и $l(t)$ достаточно ввести в рассмотрение только одну, скажем $k(t)$, и можно написать

$$\mu[k] = \varepsilon_m[k] + \sigma[k].$$

Если предположить, что $g(t) = f(t) = 0$ при всех t , что оба воздействия приложены в одной и той же точке и что оператор $N(p)$ имеет вид ⁽⁴⁾, то, как известно ^(5, 3), оптимальная передаточная функция определяется выражением

$$\Phi(j\omega) = \Upsilon(j\omega) / \Psi(\omega), \quad (10)$$

* Величина μ отличается от „практически предельной“ ошибки, введенной Н. Г. Бруевичем ⁽⁸⁾ и предложенной для характеристики свойств следящих систем К. И. Куракиным, тем, что одним из ее слагаемых является не систематическая ошибка, а максимальная ошибка в переходном процессе.

где

$$|\Psi(\omega)|^2 = S_\varphi(\omega), \quad \Upsilon(j\omega) = \int_0^\infty \beta(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (11)$$

$$\beta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{S_{m\varphi}(\omega)}{\Psi^*(\omega)} e^{j\omega(t+t_0)} d\omega, \quad (12)$$

причем

$$S_\varphi(\omega) = S_m(\omega) + S_n(\omega) + S_{mn}(\omega) + S_{nm}(\omega), \quad (13)$$

$$S_{m\varphi}(\omega) = S_m(\omega) + S_{mn}(\omega). \quad (14)$$

Формулы (10) — (14) без труда могут быть обобщены и на случай любого оператора $N(p)$, например, вида (5) или (6), при условии, что функция

$$h(t) = N(p) m(t)$$

обладает корреляционными функциями

$$R_h(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(t+\tau) h(\tau) d\tau,$$

$$R_{hn}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(t+\tau) n(\tau) d\tau.$$

Действительно, введя спектральные плотности

$$S_h(\omega) = \int_{-\infty}^\infty R_h(t) e^{-j\omega t} dt, \quad S_{hn}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty R_{hn}(t) e^{-j\omega t} dt,$$

легко показать, что и в этом общем случае формулы (10) — (12), (13) останутся неизменными, а формула (12) примет вид

$$\beta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{S_{h\varphi}(\omega)}{\Psi^*(\omega)} e^{j\omega t} d\omega, \quad (15)$$

где

$$S_{h\varphi}(\omega) = S_h(\omega) + S_{hn}(\omega). \quad (16)$$

Известный метод (5, 3) нахождения $\Phi(j\omega)$ по формулам (10) — (12) требует задания функций спектральной плотности $S_\varphi(\omega)$, $S_{m\varphi}(\omega)$ в виде дробно-рациональных функций от ω и последующего вычисления полюсов и нулей этих функций.

Ниже излагается графо-аналитический метод определения оптимальной передаточной функции $\Phi(j\omega)$ для случая любого $N(p)$ при указанных выше условиях. Для применения метода достаточно задания спектральных плотностей $S_\varphi(\omega)$, $S_{h\varphi}(\omega)$ в виде экспериментальных кривых, причем он не требует трудоемкого процесса вычисления полюсов и нулей функций $S_\varphi(\omega)$, $S_{h\varphi}(\omega)$.

Порядок действий состоит в следующем.

1-й шаг. По заданной кривой $S_\varphi(\omega)$ находим вспомогательную функцию $\Psi(\omega) = a(\omega) e^{-jb(\omega)}$. Функция $\Psi(\omega)$ не имеет в нижней полуплоскости ни нулей, ни полюсов (3). Отсюда следует (5), что между функциями $a(\omega)$ и $b(\omega)$ существует однозначная связь. Но $a(\omega) = |\Psi(\omega)| = \sqrt{S_\varphi(\omega)}$. Следовательно, задача определения $\Psi(\omega)$ по задан-

ной кривой $S_\varphi(\omega)$ сводится к известной задаче (6) определения фазовой частотной характеристики по заданной амплитудной характеристике. Зная $a(\omega)$ и $b(\omega)$, можно найти не только $\Psi(\omega)$, но и $\Psi^*(\omega)$, так как $\Psi^*(\omega) = a(\omega) e^{jb(\omega)}$.

2-й шаг. Зная $S_{h\varphi}(\omega)$ и $\Psi^*(\omega)$, находим функцию $\beta(t)$, определяемую формулой (15) при $t > 0$ следующим образом.

Пусть

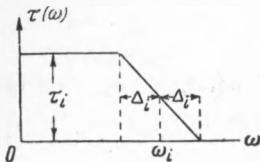


Рис. 3

где

$$\beta_{\cos}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \cos t\omega d\omega, \quad \beta_{\sin}(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) \sin t\omega d\omega.$$

Вид функций $\beta_{\cos}(t)$ и $\beta_{\sin}(t)$ легко может быть определен графически, например, при помощи разложения кривых $U(\omega)$, $V(\omega)$ на трапециoidalные частотные характеристики (4, 7).

Таким образом, можно написать (7)

$$\beta_{\cos}(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n (\tau_i \omega_i) \left(\frac{\sin \omega_i t}{\omega_i t} \right) \left(\frac{\sin \Delta_i t}{\Delta_i t} \right), \quad t > 0 \quad (18)$$

в предположении, что кривая $U(\omega)$ разлагается на n трапециoidalных характеристик. Смысл обозначений (18) ясен из рис. 3.

При помощи простых выкладок можно также показать, что

$$\beta_{\sin}(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \tau_i \left[\omega_i \left(\frac{\cos \omega_i t}{\omega_i t} \right) \left(\frac{\sin \Delta_i t}{\Delta_i t} \right) - 1 \right], \quad t > 0$$

где обозначения остаются теми же, что и в (18).

3-й шаг. Определив $\beta(t)$ при $t > 0$, находим $\Upsilon(j\omega)$, имея в виду, что взаимная связь между обеими функциями имеет вид (11) и что, следовательно, способ определения $\Upsilon(j\omega)$ аналогичен известному способу определения частотных характеристик по соответствующей им импульсной переходной функции.

Зная $\Upsilon(j\omega)$ и $\Psi^*(\omega)$, получим искомую функцию $\Phi(j\omega)$ в виде графиков соответствующих ей частотных характеристик, воспользовавшись формулой (10).

Содержание настоящей заметки показывает, что частотные методы, нашедшие широкое применение для анализа и синтеза систем регулирования, находящихся под влиянием воздействий в виде заданных функций времени, легко обобщаются и на тот более общий случай, когда воздействия содержат составляющие в виде стационарных случайных функций.

Поступило
6 XI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. В. Соловьевников, Бюлл. ВЭИ, № 4, 37 (1941). ² В. С. Кулебакин, Автоматика и телемеханика, № 4, 4 (1940). ³ В. В. Соловьевников, Изв. АН СССР, ОТН, 11, 1648 (1950). ⁴ В. В. Соловьевников, Автоматика и телемеханика, 10, 5, 362 (1949). ⁵ N. W. Eпег, Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, John Wiley, 1949. ⁶ Г. Боде, Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью, М., 1948. ⁷ В. В. Соловьевников, Частотный метод анализа качества систем автоматического регулирования, М., 1950. ⁸ Н. Г. Бруевич, Точность механизмов, 1946.