Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 2

ФИЗИКА

А. З. ДОЛГИНОВ

# УГЛОВАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ МЕЖДУ ЭЛЕКТРОНОМ, ОБРАЗУЕМЫМ ПРИ ПАРНОЙ КОНВЕРСИИ, И $\gamma$-КВАНТОМ, ИСПУСКАЕМЫМ ПРИ ПОСЛЕДУЮЩЕМ ПЕРЕХОДЕ ЯДРА

*(Представлено академиком А. Ф. Иоффе 21 XII 1950)*

В настоящее время не имеется экспериментальных или теоретических работ по угловой корреляции между направлениями вылета компонент конверсионных электронно-позитронных пар и $\gamma$-кванта, испускаемого при последующем переходе ядра. Однако такие опыты в ряде случаев были бы интересны для определения угловых моментов возбужденных состояний атомных ядер. Определение угловых моментов по величине коэффициента обычной конверсии на $K$- или $L$-электронных оболочках или по угловой корреляции между этими конверсионными электронами и последующим $\gamma$-квантом ([1]) становится затруднительным для легких ядер и больших энергий возбуждения, когда коэффициент обычной конверсии мал и слабо зависит от мультипольности перехода. Парная конверсия как раз для этих случаев наиболее вероятна.

Рассмотрим корреляцию между направлением вылета электрона парной конверсии и последующего $\gamma$-кванта при любом направлении вылета позитрона. Направление электрона выбираем за ось, т. е. $\mathbf{p}_-(p_-, 0, 0)$, $\mathbf{p}_+(p_+, \eta, \zeta)$, $\mathbf{k}(k, \theta, \Phi)$, $\mathbf{r}(r, \vartheta, \varphi)$, где $\mathbf{p}_-$, $\mathbf{p}_+$ и $\mathbf{k}$ — импульсы электрона, позитрона и $\gamma$-кванта, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор.

Для вероятности рассматриваемого процесса можем записать выражение *

$$W(\theta) - \sum_{m_1, m_3} \int d\Omega_\eta \sum_{e} \sum_{s_+, s_-} \left| \sum_{m_2} H_{12} H_{23} \right|^2, \qquad (1)$$

где $H_{12}$ — матричный элемент конверсионного перехода, а $H_{23}$ — матричный элемент последующего радиационного перехода; $\sum\limits_{e} \sum\limits_{s_+, s_-}$ — суммирование по всем направлениям поляризации $\gamma$-кванта и спинов электрона и позитрона; интегрируем по углам между импульсами электрона и позитрона; $\sum\limits_{m_1, m_3}$ и $\sum\limits_{m_2}$ — суммирование по всем значениям проекций угловых моментов $j_1$, $j_3$ и $j_2$ — начального, конечного и промежуточного состояний ядра.

---

* Мы везде будем опускать общие множители, не влияющие на корреляцию, не оговаривая этого особо.

Для матричного элемента радиационного перехода используем выражение (([2]), формула (12)):

$$H_{23}=\sum_{l=|j_2-j_3|}^{l=j_2+j_3}(-1)^{m_3}C^{l,\,m}_{j_3,\,m_3;\,j_2 m_2}\left(\mathbf{e}\mathbf{Y}^{\lambda^*}_{l,\,m}(\theta,\Phi)\right)R^{\lambda,\,l}_{j_2,\,j_3}. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{e}$ — орт поляризации $\gamma$-кванта, а $l$ определяет его мультипольность; $C^{l,\,m}_{j_3,-m_3;\,j_2,\,m_2}$ — известные коэффициенты разложения Клебша — Жордана; $\mathbf{Y}^{\lambda}_{l,\,m}(\theta,\Phi)$ — шаровая векторная функция *; $\lambda=0$, если переход магнитного типа, и $\lambda=-1$, если переход электрического типа; $R^{\lambda,\,l}_{j_2,\,j_3}$ — величина, не зависящая от углов $\theta$, $\Phi$ и значков $m_2$, $m_3$.

Матричный элемент конверсионного перехода запишем в виде:

$$H_{12}=\mathrm{const}\int\Psi^*_{j_2,\,m_2}\left[e\varphi-\frac{e}{M}(\mathbf{pA})\right]\Psi_{j_1,\,m_1}\,dv_{Np}, \qquad (3)$$

где $\Psi_{j,\,m}$ — волновая функция ядра; $\mathbf{p}$ — оператор импульса одного из протонов; $\varphi$ и $\mathbf{A}$ — потенциалы перехода электрона из состояния с отрицательной энергией в сплошной спектр положительных энергий; интегрируем по координатам всех протонов и нейтронов, причем подразумевается последующее суммирование по всем протонам ядра.

Потенциалы перехода $\varphi$ и $\mathbf{A}$ определяются через плотность перехода электрона

$$\varphi(\mathbf{r})=e\int\frac{e^{-ikr_{12}}}{r_{12}}\rho(\mathfrak{r})\,d\mathfrak{r};\qquad \mathbf{A}(\mathbf{r})=e\int\frac{e^{-ikr_{12}}}{r_{12}}\mathbf{j}(\mathfrak{r})\,d\mathfrak{r},$$

где $r_{12}=|\mathbf{r}-\mathfrak{r}|$; $k=E_+ + E_-$ — энергия, освобождаемая при парной конверсии; $\rho(\mathfrak{r})=\psi^*_+\psi_-$; $\mathbf{j}(\mathfrak{r})=(\psi^*_+\alpha\psi_-)$; пользуемся единицами, в которых $\hbar=m_e=c=1$.

В приближении Борна (которым мы ограничимся, так как для опыта наиболее интересны не тяжелые ядра, причем удобно наблюдать не слишком медленные электроны) имеем: $\psi_+=u_+e^{i\mathbf{p}_+\mathfrak{r}}$ и $\psi_-=u_-e^{-i\mathbf{p}_-\mathfrak{r}}$, где $u_+$ и $u_-$ — спинорные части волновых функций электрона в состояниях с положительной и отрицательной энергией.

В этом случае $\varphi=ae^{-i(\mathbf{p}_++\mathbf{p}_-)\mathbf{r}}$ и $\mathbf{A}=\mathbf{B}e^{-i(\mathbf{p}_++\mathbf{p}_-)\mathbf{r}}$, где $a=\dfrac{4\pi e(u^*_+u_-)}{(\mathbf{p}_++\mathbf{p}_-)^2-k^2}$; $\mathbf{B}=\dfrac{4\pi e(u^*_+\bar{\alpha}u_-)}{(\mathbf{p}_++\mathbf{p}_-)^2-k^2}$.

Потенциалы перехода электрона можно представить разложенными по потенциалам мультиполей $\varphi=\sum\limits_{l,\,m}\varphi_{l,\,m}$ и $\mathbf{A}=\sum\limits_{l,\,m,\,\lambda}\mathbf{A}_{l,\,m,\,\lambda}$.

С помощью методов и обозначений, использованных в ([3]), мы получим **

$$\varphi_{l,\,m}=\left[\sum_{L,\,\Lambda}p^L_-\,p^\Lambda_+\,Y_{L0}(00)\,Y^*_{\Lambda m}(\eta\zeta)\,\xi a\,\delta_{l,\,L+\Lambda}\right]r^l\,Y_{l,\,m}(\vartheta,\varphi), \qquad (4а)$$

$$\mathbf{A}_{l,\,m,\,0}=\left[\sum_{L,\,\Lambda}\sum_{\nu}p^L_-\,p^\Lambda_+\,Y_{L0}(00)\,Y^*_{\Lambda,\,m+\nu}(\eta\zeta)\,\xi_0\,B_\nu\,\delta_{l,\,L+\Lambda}\right]r^l\,\mathbf{Y}^0_{l,\,m}(\vartheta,\varphi), \qquad (4б)$$

$$\mathbf{A}_{l,\,m,-1}=\left[\sum_{L,\,\Lambda}\sum_{\nu}p^L_-\,p^\Lambda_+\,Y_{L0}(00)\,Y^*_{\Lambda,\,m+\nu}(\eta\zeta)\,\xi_{-1}\,B_\nu\,\delta_{l-1,\,L+\Lambda}\right]r^{l-1}\,\mathbf{Y}^{-1}_{l,\,m}(\vartheta,\varphi). \qquad (4в)$$

---

* О свойствах шаровых векторных функций см. ([3]).

** Явный вид $\rho^l_{L,\,\Lambda}$, $C^{l,\,m}_{L,\,0;\,\Lambda,\,m}$ и т. д. приведен в ([3]). Здесь $B_0=B_z$; $B_{\pm1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}[B_x\pm iB_y]$.

Здесь

$$\xi = g\rho^{l}_{L,\,\Lambda}\, C^{l,\,m}_{L,\,0;\,\Lambda,\,m}, \quad \xi_0 = g\rho^{l}_{L,\,\Lambda}\, C^{l,\,m+\nu}_{L,\,0;\,\Lambda,\,m+\nu}\, C^{l,\,m+\nu}_{1,\,\nu;\,l,\,m},$$

$$\xi_{-1} = ig\rho^{l-1}_{L,\,\Lambda}\,\frac{2l+1}{2l-1}\, C^{l-1,\,m+\nu}_{L,\,0;\,\Lambda+\nu}\, C^{l-1,\,m+\nu}_{1,\,\nu;\,l,\,m},$$

$$g = \frac{(4\pi)^2\, i^{-l}}{(2L+1)!!\,(2\Lambda+1)!!}\sqrt{\frac{2\Lambda+1}{2l+1}};$$

$\delta_{l,\,L+\Lambda}$ — символ Кронекера; $B_\nu$ — компонента вектора $\mathbf{B}$.

При выводе (4) было принято во внимание, что длина волны электрона и позитрона много больше размеров ядра, это позволяет сохранить только члены, содержащие низшие степени $p_+r$ и $p_-r$. Заметим, что в матричном элементе (3) при подстановке вместо $\varphi$ и $\mathbf{A}$ их разложений остается только один член с $\mathbf{A}_{l,\,m,\,0}$, если при отражении системы координат в начале $\Psi^*_{j_2,\,m_2}\Psi_{j_1,\,m_1}$ приобретает множитель $(-1)^{l+1}$. В этом случае переход будет магнитного типа. Если же $\Psi^*_{j_2,\,m_2}\Psi_{j_1,\,m_1}$ при отражении приобретает множитель $(-1)^l$, то переход электрического типа, и в матричном элементе остаются члены с $\varphi_{l,\,m}$, $\mathbf{A}_{l,\,m,\,-1}$ и $\mathbf{A}_{l,\,m,\,1}$. Член $\mathbf{A}_{l,\,m,\,1}$ содержит более высокую степень $p_-r$ и $p_+r$, чем $\varphi_{l,\,m}$, и $\mathbf{A}_{l,\,m,\,-1}$ поэтому может быть опущен. Над величинами $\varphi_{l,\,m}$ и $\mathbf{A}_{l,\,m,\,-1}$ электрического перехода можно произвести градиентное преобразование, подобное тому, которое было применено К. Тер-Мартиросяном ([6]): $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$, $\varphi' = \varphi - ik\chi$.

Полагаем:

$$\chi = \left[\sum_{L,\,\Lambda}\sum_{\nu} p_-^L\, p_+^\Lambda\, Y_{L0}(00)\, Y^*_{\Lambda,\,m+\nu}(\eta\zeta)\,\xi_{-1}\, B_\nu\,\delta_{l-1,\,L+\Lambda}\right]\frac{(2l-1)!!\, f_l(kr)\, Y_{lm}(\vartheta\varphi)}{k^l\sqrt{l\,/\,(2l+1)}},$$

где $f_l(kr) = \sqrt{\pi\,/\,2kr}\, J_{l+1/2}(kr)$; $J_{l+1/2}(kr)$ — функция Бесселя.

Имеет место равенство:

$$\nabla f_l(kr)\, Y_{l,\,m}(\vartheta\varphi) = -k\left[\sqrt{\frac{l}{2l+1}}\, f_{l-1}(kr)\,\mathbf{Y}^{-1}_{lm}(\vartheta\varphi) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}\, f_{l+1}(kr)\,\mathbf{Y}^{-1}_{lm}(\vartheta\varphi)\right].$$

При подстановке в выражения $\varphi'$ и $\mathbf{A}'$ полученных значений $\chi$ и $\nabla\chi$ мы разлагаем $f_l(kr)$ и, соответственно, $f_{l-1}(kr)$ по $kr$ и оставляем только члены, содержащие низшие степени $kr$. Таким образом получим: $\mathbf{A}'_{l,\,m,\,-1} = 0$,

$$\varphi'_{l,\,m} = \left\{\sum_{L,\,\Lambda}\left[p_-^L\, p_+^\Lambda\, Y_{L0}(00)\, Y^*_{\Lambda m}(\eta\zeta)\,\xi a\,\delta_{l,\,L+\Lambda} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{ik}{\sqrt{l\,(2l+1)}}\sum_{\nu} p_-^L\, p_+^\Lambda\, V_{L0}(00)\, Y^*_{\Lambda,\,m+\nu}(\eta\zeta)\,\xi_{-1}\, B_\nu\,\delta_{l-1,\,L+\Lambda}\right]\right\} r^l\, Y_{lm}(\vartheta\varphi).$$

Исходя из (5) или (4б), мы можем непосредственно вычислить матричный элемент (3) для электрического или магнитного конверсионного перехода и по формуле (1) найти угловую корреляцию между электроном испускаемой пары и последующим $\gamma$-квантом при любой мультипольности первого и второго переходов.

Рассмотрим для примера случай, когда конверсионный переход дипольный ($l = 1$), а радиационный переход $2^L$-польный.

а) Если конверсионный переход электрического типа, то указанные выше вычисления дают для искомой угловой корреляции выражение

$$W(\theta) = \sum_{m_1, m} \Big\{ \beta^2_{1,0} \gamma^2_{0,L} \Big[ (E_+E_- - 3) - \frac{1}{p_+p_-} (E_+^2 - 3E_-^2 - 2E_+E_-) \lg b \Big] +$$

$$+ \frac{1}{2} (\beta^2_{1,1} \gamma^2_{1,L} + \beta^2_{1,-1} \gamma^2_{-1,L}) [4E_-^2 - E_+E_- - 1) +$$

$$+ \frac{1}{p_+p_-} (2E_-^4 - 5E_-^2 + 2E_+^2 E_-^2 - E_+^2 - 2E_+ E_-) \lg b \Big] \Big\} | \mathbf{Y}^0_{L,m}(\theta) |^2.$$

Здесь

$$\beta_{k,\mu} = C^{j_1, m_1+\mu}_{k,\mu;\, j_1, m_1}; \quad \gamma_{\mu,L} = C^{L,m}_{j_1, -m_1;\, j_1, m_1}; \quad b = \frac{E_+E_- + p_+p_- + 1}{k};$$

значения $| \mathbf{Y}_{L,m}(\theta) |^2$ приведены в ([1]).

б) Если конверсионный переход магнитного типа, то

$$W(\theta) = \sum_{m_1, m} \Big\{ \beta^2_{1,0} \gamma^2_{0,L} \Big[ (E_+ E_- + 1) + \frac{1}{p_+p_-} (p_+^2 p_-^2 - (E_+ E_- + 1)^2) \lg b \Big] +$$

$$+ \frac{1}{2} (\beta^2_{1,1} \gamma^2_{1,L} + \beta^2_{1,-1} \gamma^2_{-1,L}) [- (E_+ E_- + 1) -$$

$$- \frac{1}{p_+ p_-} (p_+^2 p_-^2 - (E_+ E_- + 1)^2 - 2p_-^2 (p_+^2 + p_-^2)) \lg b \Big] \Big\} | \mathbf{Y}^0_{L,m}(\theta) |^2.$$

Усреднение $W(\theta)$ по углу $\theta$ дает, с точностью до множителя, известное выражение ([4]) для вероятности парной конверсии. Значения $W(\theta)$ для квадрупольного ($l = 2$) конверсионного перехода ([5]) мы не приводим ввиду их громоздкости.

Отметим, что в приведенных примерах рассматривались только переходы одной определенной мультипольности. Может, однако, случиться, что интенсивность магнитного $2^l$-польного и электрического $2^{l-1}$-польного переходов сравнимы. Тогда надо учесть соответствующие члены разложения $\varphi$ и $\mathbf{A}$ по мультиполям согласно (4), если первый переход носит смешанный характер, или разложения (2), если второй переход является смешанным.

Ленинградский
физико-технический институт
Академии наук СССР

Поступило
19 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Берестецкий, ЖЭТФ, **18**, 1070 (1948). [2] А. Долгинов, ЖЭТФ, **20**, 636 (1950). [3] В. Берестецкий, А. Долгинов и К. Тер-Мартиросян, ЖЭТФ, **20**, 527 (1950). [4] В. Берестецкий и И. Шмушкевич, ЖЭТФ, **19**, 591 (1949). [5] А. Долгинов, Диссертация, Ленингр. физ.-техн. ин-т, 1950. [6] К. Тер-Мартиросян, Диссертация, Ленингр. физ.-техн. ин-т, 1949.