Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. Л. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ

ВОЛНЫ В ПЛОСКОМ РУПОРЕ

(Представлено академиком Б. А. Введенским, 6 I 1951)

В настоящей работе применяется конформное преобразование ([1]), позволяющее свести задачу о возбуждении плоского рупора к дифференциальному уравнению в частных производных, которое при некоторых упрощающих предположениях может быть решено в конечном виде. Мы ограничимся здесь формулировкой постановки задачи и полученных результатов.

Нетрудно видеть, что, записывая уравнения Максвелла в безразмерных криволинейных ортогональных координатах φ, ψ, η, связанных с x, y, z соотношениями

$$x = \frac{a}{\alpha}(\varphi + e^{\varphi}\cos\psi), \quad y = \frac{a}{\alpha}(\psi + e^{\varphi}\sin\psi), \quad z = \frac{a}{\alpha}\eta, \tag{1}$$

где α — безразмерная величина, а a имеет смысл единицы масштаба, получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + \frac{k^2a^2}{\alpha^2}(1 + 2e^{\varphi}\cos\psi + e^{2\varphi})\,u = 0. \tag{2}$$

Считая, что решение уравнения (2) ищется в области

$$|\psi - \beta| \leqslant \alpha, \tag{3}$$

а границы области представляют собой лишенные сопротивления металлические пластинки, получим для уравнения (2) условия:
в случае электрических волн:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\psi}\right|_{\psi=\beta\pm\alpha} = 0, \quad E_{\varphi} = \frac{1}{ikh}\frac{\partial u}{\partial\psi}, \quad E_{\psi} = -\frac{1}{ikh}\frac{\partial u}{\partial\varphi}, \quad H_{\eta} = u; \tag{4}$$

в случае магнитных волн:

$$u|_{\psi=\beta\pm\alpha} = 0, \quad E_{\eta} = u, \quad H_{\varphi} = -\frac{1}{ikh}\frac{\partial u}{\partial\psi}, \quad H_{\psi} = \frac{1}{ikh}\frac{\partial u}{\partial\varphi}, \tag{5}$$

причем $h = \frac{a}{\alpha}\sqrt{1 + 2e^{\varphi}e\cos\psi + e^{2\varphi}}$.

Область, в которой решается уравнение (2), определяется неравенствами (3) и представляет собой плоский волновод с расстоянием между пластинами, равным $2a$, плавно сопряженный с секториальным рупором, имеющим угол раствора 2α, причем ось рупора составляет с осью волновода угол β. На рис. 1 изображены в схематическом виде некоторые типы рупоров, для которых задача о возбуждении здесь решается.

Такие плоские металлические пластины, форма которых определяется уравнениями $\psi - \beta = \pm\alpha$, мы будем называть в дальнейшем плоским рупором с углом раствора 2α, повернутым на угол β.

Предположим теперь, что $|\alpha/\pi| \ll 1$, т. е. что рассматривается рупор с небольшим углом раствора 2α. Тогда, как нетрудно проверить, уравнение (2) допускает разделение переменных, причем относительная точность разделения по координате φ не менее, чем $\alpha \sin\beta$

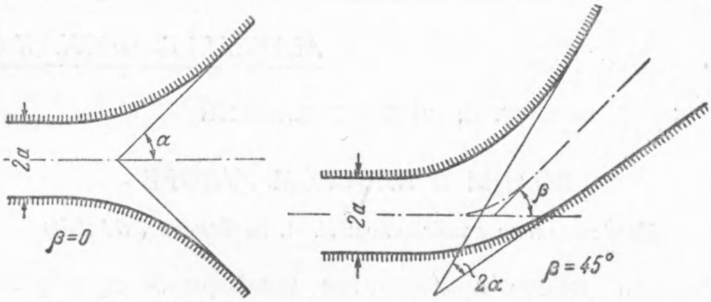

Рис. 1

Вводя обозначения:

$$q = \frac{ka}{\pi}, \quad \varkappa = \frac{\pi}{\alpha} q = \frac{ka}{\alpha}, \quad \xi = \varkappa e^{\varphi}, \quad \gamma^2 = \varkappa^2 - \mu_n^2, \tag{6}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\dfrac{\pi}{\alpha} & \text{для волн типа } E_{0,2n}, \\ \dfrac{2n+1}{2}\dfrac{\pi}{\alpha} & \text{„ „ „ } E_{0,2n+1}, \\ \dfrac{2n+1}{2}\dfrac{\pi}{\alpha} & \text{„ „ „ } H_{0,2n+1}, \\ (n+1)\dfrac{\pi}{\alpha} & \text{„ „ „ } H_{0,\,n+1}, \end{cases}$$

$$n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

и разделяя переменные в уравнении (2), получим:

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\Phi}{d\xi} + \left[1 + \frac{2\varkappa\cos\beta}{\xi} + \frac{\gamma^2}{\xi^2}\right]\Phi = 0, \qquad 0 < \xi < \infty, \tag{7}$$

при этом $u(\varphi, \psi) = \Phi(\xi)\, y(\psi)$.

Рассмотрим две возможные постановки задачи о возбуждении плоского рупора.

1. Рупор возбуждается плоской волной, приходящей из сопряженного с ним волновода (рупор в режиме излучения). В этом случае „условие излучения на бесконечности“ при $\xi \to \infty$ и краевое условие при $\xi \to 0$ типа „парциальных“ условий излучения ([2]) требуют, чтобы решение уравнения (7) при $\xi \to \infty$ имело асимптотический характер $\Phi(\xi) = Ce^{i\xi}/\sqrt{\xi} + O(\xi^{-3/2})$, а при $\xi \to 0$ — асимптотическое представление $\Phi(\xi) = A\xi^{i\gamma} + B\xi^{-i\gamma} + O(\xi)$. Эти два условия однозначно определяют решение уравнения (7). Путем несложных вычислений, с помощью асимптотических соотношений между φ, ψ, η и x, y, z для случаев больших положительных и больших отрицательных значений координаты φ находим, что величина $\varkappa^{2i\gamma}\dfrac{B}{A}$ представляет собой коэф-

фициент отражения волны, приходящей из волновода, от неоднородности сечения рупора.

2. Рупор возбуждается цилиндрической волной, проходящей из широкого конца рупора по направлению к его узкому концу. Этот случай естественно назвать случаем работы рупора в режиме приема. Проводя вычисления, аналогичные случаю работы рупора в режиме излучения, получим, что теперь надо найти решение уравнения (7), которое при $\xi \to 0$ имеет асимптотическое представление $\Phi(\xi) = \tilde{A}\xi^{-i\gamma} + O(\xi)$, а при $\xi \to \infty$ — представление

$$\Phi(\xi) = \frac{\tilde{C}e^{i\xi}}{\sqrt{\xi}} + \frac{De^{-i\xi}}{\sqrt{\xi}} + O(\xi^{-3/2}).$$

Точно так же получим, что величина $\tilde{C}/D$ пропорциональна коэффициенту отражения приходящей из широкого конца рупора цилиндрической волны от его узкого горла.

Теперь, когда выяснился характер краевых условий для уравнения (7), определяющих его единственное решение, перейдем к нахождению последнего.

Уравнение (7) заменой переменных $\xi' = 2i\xi$, $\Phi(\xi) = \xi^{-1/2}\Phi'(\xi')$ сводится к уравнению Уиттекера ([3]), в котором $k = -i\varkappa\cos\beta$, $m = i\gamma$. Нетрудно усмотреть, что условиям первой задачи о возбуждении рупора удовлетворяет функция

$$\Phi_1(\xi) = \xi^{-1/2} W_{-k,m}(-2i\xi), \tag{8}$$

а в случае работы рупора в режиме приема — функция

$$\Phi_2(\xi) = \xi^{-1/2} M_{k,-m}(2i\xi) \tag{9}$$

(здесь мы придерживаемся для специальных функций обозначений, принятых в книге ([3])). Вывод о том, что функции (8) и (9) удовлетворяют поставленным условиям, может быть легко сделан после учета асимптотических представлений для функций $M_{k,m}(z)$ и $W_{k,m}(z)$ при $z \to 0$ и при $z \to \infty$.

После того как найдены решения уравнения (7), удовлетворяющие краевым условиям, легко могут быть определены поля внутри рупора по формулам (4) и (5). Не останавливаясь, однако, на этом, заметим, что легко может быть получен результат, показывающий характер перехода плоской волны в цилиндрическую. Именно: если поперечные компоненты напряженности полей убывают пропорционально $1/(k\rho)^{1/2}$, то продольные составляющие убывают как $1/(k\rho)^{3/2}$ и, следовательно, исчезают практически уже на расстояниях порядка нескольких длин волн от плоского волновода.

Как было указано выше, исследуя функцию $\Phi_1(\xi)$ при $\xi \to 0$, можно определить коэффициент отражения волны, приходящей из волновода, для случая работы рупора в режиме излучения. Обозначая его через R, получим

$$R = (2\varkappa)^{-2i\gamma} \frac{\Gamma[1/2 - i(\varkappa\cos\beta + \gamma)]}{\Gamma[1/2 - i(\varkappa\cos\beta - \gamma)]} e^{-\pi\gamma}. \tag{10}$$

Аналогичным образом получим для второго случая возбуждения рупора:

$$R = e^{i\varphi} \frac{\Gamma[1/2 + i(\varkappa\cos\beta + \gamma)]}{\Gamma[1/2 + i(\varkappa\cos\beta - \gamma)]} e^{-\pi\gamma}, \quad \operatorname{Im}(\varphi) = 0. \tag{11}$$

Мы показали, что для небольших углов раствора рупора отражается в основном волна типа падающей. Этот результат должен быть сравнен с выводами, полученными в результате точного подсчета, для полубесконечного плоского волновода ([4]), когда отражаются все типы волн, которые могут распространяться в волноводе без затухания, причем формально этот случай соответствует рупору с углами $\alpha = \pi$, $\beta = 0$. Мы видим, таким образом, что по мере увеличения угла раствора рупора начинают отражаться все возможные типы волн.

Сравнивая модули коэффициентов отражения (10) и (11), приходим к выводу, что они оказываются равными, т. е. получаем результат, которого следовало ожидать из общих соображений. Для модуля коэффициента отражения получается при этом формула, удобная для расчетов:

$$|R| = e^{-\pi\gamma} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \pi (\varkappa \cos \beta - \gamma)}{\operatorname{ch} \pi (\varkappa \cos \beta + \gamma)}}\,. \tag{12}$$

Исследуя формулу (12), нетрудно установить, что прямой рупор ($\beta = 0$) обладает наилучшими условиями излучения на всех длинах волн, а рупор, поворачивающий назад (β близко к π),— наихудшими. Из формул (10) и (11) легко может быть получено выражение также и для фазы коэффициента отражения.

Не останавливаясь на других результатах, которые могут быть получены из изложенного выше, сделаем краткие выводы.

1. Изложенный метод расчета задач о возбуждении плоского рупора довольно общей формы не содержит никаких произвольных физических допущений, которые часто очень грубо соответствуют действительности.

2. Несмотря на приближенный характер решения, его точность может быть значительно повышена путем применения метода последовательных приближений.

3. Применяя другие типы конформных преобразований, можно исследовать задачу о возбуждении рупоров подобной формы, но с другими сопряжениями в переходной области. Тем самым можно решить вопрос о зависимости характеристик рупоров от характера сопряжения его с плоским волноводом.

4. Применяемый метод обладает большой общностью и позволяет исследовать много других физических вопросов. В частности, вопрос о возбуждении круглого и коаксиального рупоров может быть подвергнут исследованию в компактной форме.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР А. Н. Тихонову, руководившему выполнением этой работы.

Поступило
5 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, 1937. [2] А. Г. Свешников, ДАН, **73**, № 5 (1950). [3] Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. 2, 1934. [4] Л. А. Вайнштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., **12**, № 2 (1948).