Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Г. УГОДЧИКОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ЗАПРЕССОВКЕ НЕСКОЛЬКИХ КРУГЛЫХ ШАЙБ В ПЛАСТИНКУ, ОГРАНИЧЕННУЮ КРИВОЙ ЧАСТНОГО ВИДА

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 21 XI 1950)

Допустим, что имеем в плоскости z конечную односвязную область S с границей γ_0, причем область S состоит из суммы $m+1$ областей $S=S_0+S_1+\cdots+S_m$ и функция

$$z=\omega(\zeta)=\frac{k\zeta}{1-a\zeta^2} \tag{1}$$

отображает на нее лежащий в плоскости ζ круг радиусом $\rho=1$, где k $(k>0)$, a $(0<a<1)$ — постоянные величины. Предположим далее, что область S_0 сопряжена с областями S_n $(n=1, 2, \ldots, m)$ посредством прессовки или посадки в горячем состоянии, а области S_n односвязны, ограничены окружностями γ_n с центрами в точках b_n $(n=1, 2, \ldots, m)$ и не касаются друг друга. На рис. 1 изображен частный случай, когда $a=0{,}2593$, $k=25{,}25$ см, $m=2$. Будем, наконец, полагать, что нам известны силы, действующие на контуре γ_0, и скачок смещений на γ_n $(n=1, 2, \ldots, m)$ при переходе из области S_0 в область S_n $(n=1, 2, \ldots, m)$ и что упругие свойства всех S_n $(n=0, 1, 2, \ldots, m)$ одинаковы. В этом случае задача определения компонентов вектора напряжения в какой-либо точке области S_n $(n=0, 1, \ldots, m)$, согласно исследованиям Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили, сводится к нахождению функций $\varphi_n(z)$, $\psi_n(z)$, регулярных в областях S_n $(n=0, 1, \ldots, m)$ из следующих граничных условий:

$$\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=f_1+if_2+C_0 \quad \text{на } \gamma_0, \tag{2}$$

$$\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=\varphi_n(t)+t\overline{\varphi_n'(t)}+\overline{\psi_n(t)},$$

$$\varkappa\varphi_0(t)-t\overline{\varphi_0'(t)}-\overline{\psi_0(t)}=\varkappa\varphi_n(t)-t\overline{\varphi_n'(t)}-\overline{\psi_n(t)}+g_n(t) \tag{3}$$

$$\text{на } \gamma_n\,(n=1, 2, \ldots, m).$$

Здесь $f_1+if_2=f(t)=i\int\limits_0^s(X_0+iY_0)\,ds$ — известная функция, так как по условию нам известны компоненты внешнего напряжения (X_0, Y_0) на γ_0; s — дуга γ_0; t — аффикс точек γ_n $(n=0, 1, \ldots, m)$; C_0 — постоянная, которую можно положить равной нулю, так как область S односвязна; функция $g_n(t)=2\mu\,(u_n+iv_n)$, где u_n+iv_n — скачок смещения на γ_n $(n=1, 2, \ldots, m)$, известна и в случае запрессовки круговой шайбы радиусом r_n'' в отверстие области S_0, имеющее радиус r_n', будет иметь вид:

$$g_n(t)=2\mu\,(r_n''-r_n')\frac{t-b_n}{r_n}=\frac{2\mu\delta_n'}{r_n}(t-b_n)=\delta_n(t-b_n). \tag{4}$$

Здесь $\delta_n' = r_n'' - r_n'$ — натяг при запрессовке в область S_0 области S_n $(n = 1, 2, \ldots, m)$; r_n — радиус запрессованной шайбы — радиус γ_n $(n = 1, 2, \ldots, m)$; $\frac{2\mu\delta_n'}{r_n} = \delta_n$ — обозначение, введенное для краткости письма.

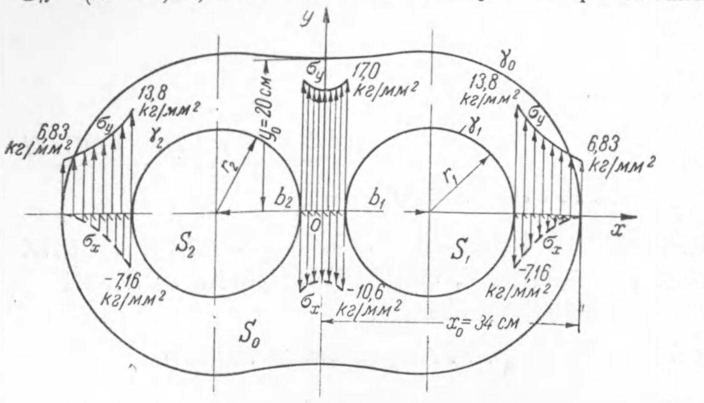

Рис. 1

Поставленную задачу сведем к первой основной задаче теории упругости для всей области S, занятой сопряженными телами, используя указанный в [1] Д. И. Шерманом метод. Проводимые при этом преобразования будут аналогичны преобразованиям, сделанным на основании того же метода в [2-4] Н. Д. Тарабасовым при решении задач о запрессовке круглых шайб в круглую пластинку.

Складывая уравнения (3) и подставляя значение $g_n(t)$, имеем

$$\varphi_0(t) = \varphi_n(t) + \frac{\delta_n}{1+\varkappa}(t - b_n) \quad \text{на } \gamma_n \quad (n = 1, 2, \ldots, m). \tag{5}$$

Далее, подставляя значения $\varphi_0(t)$ из (5) в сопряженное с первым из уравнений (3), получим, учитывая, что $\overline{t} = \frac{r_n^2}{t - b_n} + \overline{b}_n$,

$$\psi_0(t) = \psi_n(t) - \frac{\delta_n}{1+\varkappa}\left(\frac{2r_n^2}{t - b_n} + \overline{b}_n\right) \quad \text{на } \gamma_n \quad (n = 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

Введем теперь в области S_0 функции $\varphi_0^*(z)$, $\psi_0^*(z)$, связанные с первоначальными $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ соотношениями:

$$\varphi_0^*(z) = \varphi_0(z); \quad \psi_0^*(z) = \psi_0(z) + \sum_{n=1}^{n=m} \frac{2\delta_n r_n^2}{(1+\varkappa)(z - b_n)}; \tag{7}$$

при этом на γ_n $(n = 1, 2, \ldots, m)$, согласно (5) и (6), функции $\varphi_0^*(z)$ и $\psi_0^*(z)$ примут вид:

$$\varphi_0^*(t) = \varphi_n(t) + \frac{\delta_n}{1+\varkappa}(t - b_n); \quad \psi_0^*(t) = \psi_n(t) - \frac{\delta_n \overline{b}_n}{1+\varkappa} -$$
$$- \frac{2\delta_n r_n}{(1+\varkappa)(t - b_n)} + \sum_{n=1}^{n=m} \frac{2\delta_n r_n^2}{(1+\varkappa)(z - b_n)} \quad \text{на } \gamma_n \quad (n = 1, 2, \ldots, m). \tag{8}$$

Таким образом, функции $\varphi_0^*(z)$ и $\psi_0^*(z)$ регулярны в области S_0 и на границах γ_n $(n = 1, 2, \ldots, m)$ совпадают с значениями функций, регулярных в областях S_n $(n = 1, 2, \ldots, m)$, т. е. эти функции являются аналитическими во всей области S. Контурные условия для их определения получим из уравнения (2), выразив $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ из (7):

$$\varphi_0^*(t) + t\overline{\varphi_0^{*\prime}(t)} + \overline{\psi_0^*(t)} = f_1 + if_2 + \sum_{n=1}^{n=m} \frac{2\delta_n r_n^2}{(1+\varkappa)(\overline{t} - \overline{b}_n)}. \tag{9}$$

Используя метод Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили [5] для нахождения напряжений в областях, отображаемых с помощью функции $z = \omega(\zeta)$ на круг $\rho = 1$, получим контурные условия в виде:

$$\varphi(\sigma)+\frac{(\sigma^2-a)^2\,\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma(1-a\sigma^2)(\sigma^2+a)}+\overline{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)=f(t)+\sum_{n=1}^{n=m}\frac{2\delta_n r_n^2(a-\sigma^2)}{(1+\varkappa)\left(\overline{b}_n\sigma^2-k\sigma-a\overline{b}_n\right)},\tag{10}$$

где σ — точка окружности γ радиусом $\rho=1$ области ζ, а функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ связаны с исходными так, что $\varphi(\zeta)=\varphi_0^*(z);\psi(\zeta)=\psi_0^*(z)$.

Так как решение плоской задачи теории упругости для области, ограниченной данной кривой, дано Г. Н. Бухариновым [6], то здесь будет решен вопрос о напряжениях, возникающих при запрессовке, когда внешний контур свободен от усилий, $f_1+if_2=0$.

Умножив левую и правую части уравнения (10) и с ним сопряженного на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ и интегрируя по γ, получим:

$$\varphi(\zeta)=\frac{2}{1+\varkappa}\sum_{n=1}^{n=m}\delta_n r_n^2\left[\frac{a-\zeta^2}{\overline{b}_n\zeta^2-k\zeta-a\overline{b}_n}-\frac{a-\alpha_n''^2}{b_n(\alpha_n''-\alpha_n')(\zeta-\alpha_n'')}\right]-$$
$$-\frac{(1-a^2)^2}{2\sqrt{a}(1+a^2)}\left[\frac{\overline{\varphi}'(\sqrt{a})}{1-\sqrt{a}\zeta}-\frac{\overline{\varphi}'(-\sqrt{a})}{1+\sqrt{a}\zeta}\right];\tag{11}$$

$$\psi(\zeta)=\frac{2}{1+\varkappa}\sum_{n=1}^{n=m}\delta_n r_n^2\left[\frac{1-a\zeta^2}{ab_n\zeta^2+k\zeta-b_n}-\frac{1-a\beta_n''^2}{ab_n(\beta_n''-\beta_n')(\zeta-\beta_n'')}\right]-$$
$$-\frac{\zeta(1-a\zeta^2)^2}{(\zeta^2-a)(1+a\zeta^2)}\varphi'(\zeta)+\frac{(1-a^2)^2}{2(1+a^2)}\left[\frac{\varphi'(\sqrt{a})}{\zeta-\sqrt{a}}+\frac{\varphi'(-\sqrt{a})}{\zeta+\sqrt{a}}\right],$$

где α_n' и α_n'' — корни уравнения $\overline{b}_n\zeta^2-k\zeta-a\overline{b}_n=0$, причем $|\alpha_n'|>1$ и $|\alpha_n''|<1$; β_n' и β_n'' — корни уравнения $ab_n\zeta^2+k\zeta-b_n=0$, причем $|\beta_n'|>1$ и $|\beta_n''|<1$; $\varphi'(\sqrt{a})$, $\overline{\varphi}'(\sqrt{a})$, $\varphi'(-\sqrt{a})$, $\overline{\varphi}'(-\sqrt{a})$ — постоянные, которые определяются из соотношений:

$$\mathrm{Re}\,[\varphi'(\sqrt{a})+\varphi'(-\sqrt{a})]=\frac{2}{k(1+\varkappa)}\sum_{n=1}^{n=m}\delta_n r_n^2,$$

$$\mathrm{Im}\,[\varphi'(\sqrt{a})+\varphi'(-\sqrt{a})]=-\frac{4k}{1-\varkappa}\frac{1+a^2}{(1-a^2)^2}\,\mathrm{Im}\sum_{n=1}^{n=m}\frac{\delta_n r_n^2}{b_n^2}\frac{1}{\alpha_n'(\alpha_n'-\alpha_n'')},$$

$$\mathrm{Re}\,[\varphi'(\sqrt{a})-\varphi'(-\sqrt{a})]=\frac{8\sqrt{a}}{k(1+\varkappa)}\frac{1+a^2}{(1+a)^2}\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{n=m}\frac{\delta_n r_n^2}{\alpha_n'-\alpha_n''},\tag{12}$$

$$\mathrm{Im}\,[\varphi'(\sqrt{a})-\varphi'(-\sqrt{a})]=\frac{8\sqrt{a}}{k(1+\varkappa)}\frac{1+a^2}{(1-a)^2}\,\mathrm{Im}\sum_{n=1}^{n=m}\frac{\delta_n r_n^2}{\alpha_n'-\alpha_n''}.$$

На основании (7) для области S_0 будем иметь:

$$\varphi_{00}(\zeta)=\varphi_0(z)=\frac{2}{1+\varkappa}\sum_{n=1}^{n=m}\delta_n r_n^2\left[\frac{a-\zeta^2}{\overline{b}_n\zeta^2-k\zeta-a\overline{b}_n}-\frac{a-\alpha_n''^2}{\overline{b}_n(\alpha_n''-\alpha_n')(\zeta-\alpha_n'')}\right]-$$
$$-\frac{(1-\alpha^2)^2}{2\sqrt{a}(1+a^2)}\left[\frac{\overline{\varphi}'(\sqrt{a})}{1-\sqrt{a}\zeta}-\frac{\overline{\varphi}'(-\sqrt{a})}{1+\sqrt{a}\zeta}\right];$$

$$\psi_{00}(\zeta) = \psi_0(z) = -\frac{2}{1+\varkappa}\sum_{n=1}^{n=m}\frac{\delta_n r_n^2}{ab_n}\frac{1-a\beta_n''^2}{\beta_n''-\beta_n'}\frac{1}{\zeta-\beta_n''} - \frac{\zeta(1-a\zeta^2)^2}{(\zeta^2-a)(1+a\zeta^2)}\varphi'(\zeta) +$$

$$+\frac{(1-a^2)^2}{2(1+a^2)}\left[\frac{\varphi'(\sqrt{a})}{\zeta-\sqrt{a}}+\frac{\varphi'(-\sqrt{a})}{\zeta+\sqrt{a}}\right]. \qquad (13)$$

Нетрудно видеть, что функции $\varphi_{00}(\zeta)$ и $\psi_{00}(\zeta)$ регулярны в области S_0 и удовлетворяют контурным условиям. Функции $\varphi_{nn}(\zeta)=\varphi_n(z)$ и $\psi_{nn}(\zeta)=\psi_n(z)$ для областей S_n $(n=1, 2, \ldots, m)$ легко найдутся по формулам (5) и (6). Напряжения определятся по известным формулам ([5]).

Автором получены формулы для нахождения напряжений в области S_0 для следующих двух частных случаев:

1. В области S_0, имеющей отверстие с центром в начале координат, запрессована шайба радиусом r_1 и натягом δ_1'. При этом $m=1$, $b_n=b_1=0$, и функции примут вид:

$$\varphi_{00}(\zeta)=\frac{2\delta_1 r_1^2}{k(1+\varkappa)}\left[\zeta-\frac{(1-a^2)^2}{2(1+a^2)}\frac{\zeta}{1-a\zeta^2}\right],$$

$$\psi_{00}(\zeta)=\frac{2\delta_1 r_1^2}{k(1+\varkappa)}\left[\frac{(1-a^2)^2}{1+a^2}\frac{\zeta}{\zeta^2-a}-\frac{\zeta(1-a\zeta^2)^2}{(\zeta^2-a)(1+a\zeta^2)}-\frac{1}{\zeta}\right]. \qquad (14)$$

2. В область S_0 запрессованы две шайбы радиусами $r_1=r_2=r$ и натягом $\delta_1'=\delta_2'=\delta'$, причем центры этих шайб расположены на оси x и находятся от начала координат на расстоянии $b_1=b$, $b_2=-b$. Здесь $m=2$, и функции $\varphi_{00}(\zeta)$ и $\psi_{00}(\zeta)$ принимают вид:

$$\varphi_{00}(\zeta)=-\frac{2\delta r^2}{1+\varkappa}\left[\frac{2k\alpha_1}{b^2(\alpha_1-\alpha_2)}\frac{\zeta}{\zeta^2-\alpha_1^2}+\frac{(1-a^2)^2}{k(1+a^2)}\frac{\zeta}{1-a\zeta^2}\right],$$

$$\psi_{00}(\zeta)=\frac{4\delta r^2}{1+\varkappa}\left\{\frac{(1-a^2)^2}{k(1+a^2)}\frac{\zeta}{\zeta^2-a}-\frac{k\alpha_1}{b^2(\alpha_1-\alpha_2)}\left[\frac{\zeta(1-a\zeta^2)^2(\zeta^2+\alpha_1^2)}{(\zeta^2-a)(1+a\zeta^2)(\zeta^2-\alpha_1^2)^2}+\frac{\zeta}{\alpha_1^2\zeta^2-1}\right]\right\}, \qquad (15)$$

где

$$\alpha_1=\alpha_1'=\frac{k+\sqrt{k^2+4ab^2}}{2b}, \quad \alpha_2=\alpha_1''=\frac{k-\sqrt{k^2+4ab^2}}{2b}.$$

На рис. 1 построены эпюры напряжений в точках оси x области S_0, когда $a=0{,}2593$, $b=x_0-y_0$, $\delta'=1\cdot10^{-3}r$, $r=0{,}55\,y_0$ и материал сопрягаемых деталей — сталь с модулем упругости $E=2{,}1\cdot10^6$ кг/см^2.

Указанный метод легко может быть применен во всех случаях, когда вся область S, занятая сопряженными телами, односвязна и функция $z=\omega(\zeta)$ отображает на нее лежащий в плоскости ζ круг радиусом $\rho=1$, а области S_n $(n=1, 2, \ldots, m)$ представляют собой сплошные круглые шайбы. При этом исходным будет уравнение (9).

Поступило
23 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. И. Шерман, ДАН, 27, № 9 (1940). [2] Н. Д. Тарабасов, Инж. сборн., 3, № 2 (1947). [3] Н. Д. Тарабасов, там же, 5, № 2 (1949). [4] Н. Д. Тарабасов, ДАН, 63, № 1 (1948). [5] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, 1949. [6] Г. Н. Бухаринов, Сборн. Экспериментальные методы определения напряжений и деформаций в упругой и пластической зонах, 1935, стр. 135.