

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. С. КОВАЛЬСКИЙ

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ БАЛКИ НА УПРУГОМ
ОСНОВАНИИ

(Представлено академиком А. Н. Некрасовым 9 I 1951)

Пусть в сечении балки имеем изгибающий момент

$$M = tM_s, \quad t > 1, \quad M_s = \frac{2I}{h} \sigma_s,$$

а материал балки обладает упрочнением, которое, для упрощения, не внося этим принципиальных ограничений, примем линейным, $E_s = \lambda E$, где E_s — модуль пластичности.

Обозначив через $z = \rho h$ высоту упругой зоны сечения, имеем в этом случае

$$t = \frac{\lambda}{\rho} + \frac{3}{2} (1 - \lambda) - \frac{1}{2} (1 - \lambda) \rho^2, \quad (1)$$

откуда

$$\rho = \varphi(t). \quad (2)$$

Кривая $\varphi(t)$ дана на рис. 2. В области не очень малых ρ влияние упрочнения весьма мало (для стали λ имеет порядок 0,05) и при $1 < t < 1,5$ мы можем принять $\lambda = 0$; тогда

$$\rho = \sqrt{3 - 2t}. \quad (3)$$

В области $t > 1,5$, когда упругая зона стягивается в весьма узкую полоску, влияние λ становится значительным; пренебрегая в (1) членом с ρ^2 , получаем

$$\rho = \frac{\lambda}{t - \frac{3}{2} (1 - \lambda)}. \quad (4)$$

На рис. 2 кривая a отвечает (3), кривая b — (4).

Кривизна балки в любом сечении на участке пластических деформаций равна

$$\frac{1}{R} = \frac{2\sigma_s}{Ez} = \frac{1}{EI} \frac{2I\sigma_s}{h} \frac{h}{z} = \frac{M_s}{\rho B_0} = \frac{M}{t\rho B_0}, \quad B_0 = EI,$$

следовательно, при определении кривой изгиба балки на участке с упруго-пластическими деформациями можно полагать балку работающей упруго, но имеющей переменную изгибную жесткость

$$B_t = t\rho B_0 = \psi(t) B_0.$$

В дифференциальном уравнении

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{q}{kb} + \frac{1}{kb} \frac{d^2 M}{dx^2} \right) = -\frac{M}{B_t}$$

где q — распределенная нагрузка (на единицу длины балки), k — модуль жесткости основания, b — ширина подошвы балки, принимаем $b = \text{const}$, $K = kb$, тогда имеем

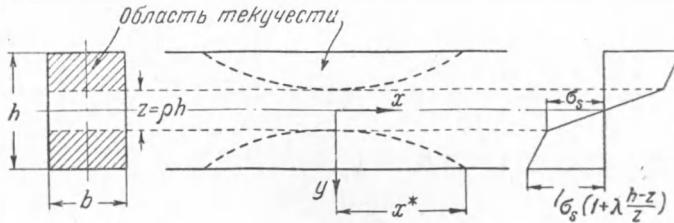


Рис. 1

$$\frac{d^4 M}{dx^4} + \frac{K}{B_t} M = -\frac{d^2 q}{dx^2},$$

или

$$\frac{d^4 t}{d\eta^4} + \frac{4t}{\psi(t)} = -\frac{\beta^2}{M_s} \frac{d^2 q}{d\eta^2}, \quad (5)$$

где

$$\eta = \beta x, \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4B_t}}.$$

Для стадии упругой работы балки $\psi(t) = 1$ и (5) имеет вид

$$\frac{d^4 t}{d\eta^4} + 4t = -\frac{\beta^2}{M_s} \frac{d^2 q}{d\eta^2} = f(\eta);$$

решение этого линейного уравнения элементарно и широко применяется в инженерной практике (1).

С появлением пластических деформаций следует принять $\psi(t) = t\varphi$,

где φ по (3). В этом случае имеем

$$\frac{d^4 t}{d\eta^4} + \frac{4}{\sqrt{3-2t}} = f(\eta)$$

или, вводя $t = \frac{3}{2} - 2v$,

$$\frac{d^4 v}{d\eta^4} - \frac{1}{\sqrt{v}} = -\frac{1}{2} f(\eta);$$

решение же этого нелинейного уравнения может быть дано в виде бесконечного ряда

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n \quad \text{или} \quad t = \frac{3}{2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n,$$

причем a_0, a_1, a_2, a_3 находятся из условий загружения балки, граничных условий и условий сопряжения участков балки с только упругими и с упруго-пластическими деформациями, а значения $a_n, n=4, 5, 6, \dots$ определяются через a_0, a_1, a_2, a_3 . Например, если $q = a + bx$ (a и b

могут быть нули) и, следовательно, $f(\eta) = 0$, то

$$a_n = (-1)^n \frac{(n-4)!}{2 \cdot n!} \frac{1}{V_{a_0}} R_n,$$

$$R_4 = 2, \quad R_5 = \frac{a_1}{a_0}, \quad R_6 = \frac{3}{2} \frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{a_2}{a_0}$$

и т. д.

Место сопряжения двух участков балки находим из условия $M = M_s$ или

$$t(\eta^*) = 1. \quad (6)$$

При больших значениях t ($> 1,5$) следует принять ρ по (4); тогда, обозначая

$$\theta = \varepsilon x, \quad \varepsilon = \beta \lambda^{-1/4},$$

опять приходим к линейному уравнению

$$\frac{d^4 t}{d\theta^4} + 4t = 6(1 - \lambda) - \frac{\varepsilon^2}{M_s} \frac{d^2 q}{d\theta^2}. \quad (7)$$

Поступило
15 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Н. Крылов, О расчете балок, лежащих на упругом основании, 1930;
А. А. Уманский, О расчете балок на упругом основании, Л., 1933; Э. Ф. Корней-
виц и Г. В. Эндер, Формулы для расчета балок на упругом основании, М., 1932.